DIE POLBAHNEN

DES

HOOKE'SCHEN GELENKS.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT ZU JENA

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VORGELEGT

VON

OSWALD MARBACH

KÖNIGL. GEWERBESCHULLEHRER IN POTSDAM.

MIT 2 TAFELN.

BERLIN.

VERLAG VON ERNST & KORN.

(GROPIUS'SCHE BUCH- UND KUNSTHANDLUNG)

WILHELMSTRASSE 90

(NÄCHST DEM ARCHITEKTENHAUSE).

1880.

DIE POLBAHNEN

DES

HOOKE'SCHEN GELENKS.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT ZU JENA

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VORGELEGT

VON

OSWALD MARBACH

KÖNIGL. GEWERBESCHULLEHRER IN POTSDAM.

MIT 2 TAFELN.

BERLIN.

VERLAG VON ERNST & KORN.

(GROPIUS'SCHE BUCH- UND KUNSTHANDLUNG)

WILHELMSTRASSE 90

(NÄCHST DEM ARCHITEKTENHAUSE).

1880.

HERRN MORITZ BOTHE

und

FRAU KLOTHILDE BOTHE GEB. MARBACH

SEINEN PFLEGEELTERN

IN KINDLICHER DANKBARKEIT UND LIEBE

GEWIDMET

VOM VERFASSER.

Die Polbahnen
des Hooke'schen Gelenks.

Die Theorie des Hooke'schen Universalgelenks führt auf die Untersuchung der Bewegung eines grössten Kugelkreises, dessen Endpunkte auf zwei gegebenen grössten Kreisen derselben Kugel gleiten. Mit Rücksicht hierauf sind in nachstehender Abhandlung die beiden aufeinander rollenden sphärischen Polbahnen des Hooke'schen Gelenks vollständig discutirt und in beifolgenden Tafeln in zwei aufeinander senkrechten Projectionsebenen, von denen die eine den Winkel der beiden grössten Kugelkreise halbirt, dargestellt worden, und zwar für die Fälle, wo dieser Winkel $= 30^0$, $= 60^0$ und $= 84^0$ ist.

§ 1. Einleitung.

Das Hooke'sche Universalgelenk, auch Hooke'scher Schlüssel, Kreuzgelenkkupplung oder Cardanisches Gelenk genannt, ist ein von Geronimo Cardano (Pavia 1501 — Rom 1576) erfundener Maschinentheil, der von Robert Hooke (1635, Freshwater auf der Insel Wight — London 1703) zuerst zur Kupplung von gegeneinander geneigten Wellen benutzt wurde.

Das Universalgelenk (s. Fig. 1) besteht in einem beweglichen Kreuze ACA, BCB, dessen zapfenförmige Enden drehbar in den Punkten AA und BB der Bügel befestigt sind, in welche die zu verbindenden Wellen auslaufen.

Die Lager, in welchen die Wellen sich drehen, sind auf derselben Unterlage befestigt, also als fest mit einander verbunden zu denken.

Wird eine der Wellen, z. B. D, in Rotation versetzt, so durchlaufen die Punkte AA einen Kreis, und da die andern Enden BB des Kreuzes mit AA fest verbunden sind, werden auch diese, und zwar in einem Abstande von 90^0 von AA, bewegt werden.

Wegen der festen Verbindung der Zapfen BB mit der Welle E, wird ihre Bahn ein auf der Richtung dieser Welle senkrechter Kreis sein. Bei der ganzen Bewegung bleibt der Mittelpunkt C des Kreuzes im Durchschnittspunkt der Rotationsaxen der bewegten Wellen, theilt also ihre Eigenschaft, gegen die gemeinschaftliche als festgedachte Basis der Lager in Ruhe zu sein.

Wird ein anderer Theil des Mechanismus festgehalten, die gemeinschaftliche Lagerbasis also beweglich gedacht, so wird immer der Punkt C gegen den festen Theil in Ruhe verharren.

Die Betrachtung der Bewegung des Universalgelenkes führt also auf die Betrachtung der Bewegung um einen festen Punkt. Bewegt ein geometrischer Körper sich derartig, dass einer seiner Punkte, o, keine Bewegung macht, so werden die Punkte, die auf einer und derselben durch den festen Punkt gehenden Geraden liegen, Geschwindigkeiten haben, die proportional ihrer Entfernung von o sind. Ist also die Geschwindigkeit in einem Punkte der Geraden, z. B. in der Entfernung 1 von o bekannt, so wird die Geschwindigkeit in jedem andern Punkte berechnet werden können. Sei die Geschwindigkeit irgend eines Punktes u, ω die Geschwindigkeit in der Entfernung 1 von o, r die Strecke von o bis zum betrachteten Punkte, so ist

$$u = r\,\omega.$$

Alle Punkte des bewegten Körpers, die anfangs gleichen Abstand vom Drehpunkt haben, also in derselben Kugelfläche liegen, werden stets in dieser Fläche bleiben, die ganze Bewegung des Systems wird sich daher vollständig durch die Bewegung auf einer Kugelfläche darstellen lassen.

Aus diesem Grunde bezeichnet man den Theil der kinematischen Geometrie, welcher sich mit der Drehung eines geometrischen Körpers um einen festen Drehpunkt beschäftigt, als die

§ 2. Kinematische Geometrie auf der Kugel.*)

S. Fig. 2.

Rotation um zwei Axen. Denkt man sich eine Gerade OA als Rotationsaxe eines starren Systems, und eine sie in O schneidende zweite Gerade $OA_{,}$, so wird dieselbe einen Kegel und alle ihre Punkte Kreise beschreiben. Ist nun auch $OA_{,}$ Rotationsaxe, so wird jeder Punkt des Systems eine Bewegung um $OA_{,}$ und eine um OA haben. Sei $\omega_{,}$ die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die Drehung um die Axe OA vor sich geht, so wird ein Punkt P in der Entfernung $r_{,}$ von OA die Geschwindigkeit $r_{,}\omega_{,}$ haben, die wir als seine Führungsgeschwindigkeit bezeichnen wollen. Ausser ihr hat noch jeder Punkt eine relative Geschwindigkeit um die Axe $OA_{,}$. Sei die Entfernung des betrachteten Punktes P von dieser zweiten Axe $r_{,,}$ und $\omega_{,,}$ die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das System um dieselbe dreht, so wird die Geschwindigkeit, welche der Punkt P von dieser Axe erhält, $r_{,,}\omega_{,,}$ sein. Die absolute Geschwindigkeit des Punktes P wird sich als die Resultante seiner relativen und seiner Führungsgeschwindigkeit ergeben.

Momentane Drehaxe. Sind in irgend einem Punkte $\mathfrak{P}$ die Geschwindigkeitscomponenten gleich, $r_{,}\omega_{,} = r_{,,}\omega_{,,}$ und gleich und entgegengesetzt gerichtet, so wird die absolute Geschwindigkeit eines solchen Punktes Null sein, also da auch der Punkt O sich in Ruhe befindet, die ganze Gerade $O\mathfrak{P}$ keine Bewegung machen, und somit wird an die Stelle von zwei Drehaxen eine einzige treten, welche durch den Schnittpunkt der beiden vorigen geht.

Dreht sich ein Punkt um eine Axe, so steht seine Bewegungsrichtung senkrecht auf der Ebene, welche durch diese Axe und die Senkrechte vom bewegten Punkte auf sie bestimmt wird. Da im Punkte $\mathfrak{P}$ die Führungsgeschwindigkeit und die relative Geschwindigkeit gleich und entgegengesetzt gerichtet sein sollen, so müssen die auf ihnen senkrechten Ebenen zusammenfallen, also muss der Punkt $\mathfrak{P}$ in der Ebene $AOA_{,}$ der ursprünglichen Drehaxen liegen. Zur Bestimmung von $\mathfrak{P}$ haben wir die Gleichung $r_{,}\omega_{,} = r_{,,}\omega_{,,}$ oder $r_{,} : r_{,,} = \omega_{,,} : \omega_{,}$. Man construirt die gesuchte Drehaxe, indem man auf den gegebenen Axen ihre Winkelgeschwindigkeiten von O aus aufträgt, und die Figur zum Parallelogramm ergänzt. Die Diagonale von O aus ist die Richtung der gesuchten Geraden.

Bezeichnet man die der Diagonale anliegenden Winkel mit $\varphi_{,}$ resp. $\varphi_{,,}$, so folgt $\omega_{,} : \omega_{,,} = r_{,,} : r_{,} = \sin\varphi_{,,} : \sin\varphi_{,}$, also $\omega_{,}\sin\varphi_{,} = \omega_{,,}\sin\varphi_{,,}$.

Die Geschwindigkeit, mit welcher das System sich um die resultirende Axe dreht, erhält man aus derselben Figur.

Fällt man von einem Punkte Q der ersten Axe OA auf die resultirende die Senkrechte r und die Senkrechte R auf die zweite Axe, so ist die Geschwindigkeit von Q, da dieser Punkt der ersten Axe angehört, also keine Geschwindigkeit um dieselbe besitzt, gleich $R\omega_{,,}$, aber auch, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit des Systems um die resultirende Axe ist, gleich $r\omega$, es folgt: $r\omega = R\omega_{,,}$, $\omega : \omega_{,,} = R : r = \sin(\varphi_{,} + \varphi_{,,}) : \sin\varphi_{,}$, woraus sich ergiebt:

*) Nach Aronhold.

$\omega = \frac{\sin(\varphi_{,} + \varphi_{,,})}{\sin \varphi_{,}} \omega_{,,} = \frac{\sin(\varphi_{,} + \varphi_{,,})}{\sin \varphi_{,,}} \omega_{,}$; d. h.: Die Grösse der resultirenden Winkelgeschwindigkeit ist dargestellt durch dieselbe Diagonale des obigen Parallelogramms, welche die Richtung ihrer Drehaxe bestimmte.

Bisher ist $\omega_{,}$ und $\omega_{,,}$ als in gleichem Sinne drehend vorausgesetzt worden, ist dies nicht der Fall, so wird die betreffende Winkelgeschwindigkeit auf der Verlängerung aufgetragen, sonst bleibt Alles wie oben.

Ist u' die Geschwindigkeit von $\mathfrak{P}$, so ist $u' = r_{,} \omega_{,}$ und $u' = r_{,,} \omega_{,,}$. Es folgt $r_{,} = O\mathfrak{P} \sin \varphi_{,}$, $r_{,,} = O\mathfrak{P} \sin \varphi_{,,}$ also $\omega_{,} \sin \varphi_{,} = \frac{u'}{O\mathfrak{P}}$, $\omega_{,,} \sin \varphi_{,,} = \frac{u'}{O\mathfrak{P}}$. Es ist $\frac{u'}{O\mathfrak{P}}$ die Geschwindigkeit, welche derjenige Punkt auf der Geraden $O\mathfrak{P}$ hat, dessen Entfernung von O gleich 1 ist, wird sie mit u bezeichnet, so folgt $\omega_{,} \sin \varphi_{,} = u$, $\omega_{,,} \sin \varphi_{,,} = u$, $\omega_{,} = \frac{u}{\sin \varphi_{,}}$, $\omega_{,,} = \frac{u}{\sin \varphi_{,,}}$, $\omega = \frac{u \sin(\varphi_{,} + \varphi_{,,})}{\sin \varphi_{,} \cdot \sin \varphi_{,,}}$.

Mit Hülfe dieser Formeln ist es möglich, die Rotation um eine Axe, wenn die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung gegeben ist, in gleichzeitige Rotation um zwei beliebige, durch den festen Punkt gehende Axen, deren Winkel mit ersterer Axe bekannt sind, zu zerlegen. Aus ω, $\varphi_{,}$, $\varphi_{,,}$ findet man u, hieraus $\omega_{,}$ und $\omega_{,,}$.

Ist die Bewegung eines geometrischen Körpers um einen festen Punkt zu untersuchen, so legen wir um diesen Punkt eine Kugel mit dem Radius 1 und betrachten die Bewegung auf deren Oberfläche, was, wie oben gezeigt, vollständig genügt. Irgend ein Punkt P der Kugelfläche habe die Geschwindigkeit u, wird nun dem ganzen Systeme die Geschwindigkeit $-u$ ertheilt, so wird der Punkt P in Ruhe bleiben, also müssen alle anderen Punkte bei weiterer Bewegung um OP rotiren. Ist u_k die Geschwindigkeit eines Punktes vor Zufügung der Geschwindigkeit $-u$, so wird sich die neue Geschwindigkeit als Resultante aus u_k und $-u$ ergeben.

Will man dem System die Geschwindigkeit u wieder hinzufügen, so wird dies erreicht, indem man ihm zur Rotation um die Axe OP noch eine Rotation um die Axe OQ ertheilt, welche im Mittelpunkte der Kugel senkrecht auf der durch die Richtung von u und die Gerade OP bestimmten Ebene steht. Die Bewegung jedes Punktes lässt sich also auf die Rotation um zwei sich schneidende Geraden zurückführen, und diese wiederum, wie oben gezeigt, auf die Rotation um eine einzige Gerade, die in jedem Augenblicke eine andere sein kann. Es folgt der Satz:

Polbahn. Bewegt sich ein Körper so, dass seine Punkte Bahnen auf concentrischen Kugelflächen beschreiben, so lässt sich seine Bewegung in jedem Augenblicke als Drehung um eine durch den Kugelmittelpunkt gehende Axe darstellen, welche den Namen augenblickliche oder momentane Drehaxe des Systems führt. Weil dieselbe von Euler gefunden ist, wird sie auch als die Euler'sche Drehaxe bezeichnet.

In irgend einem Zeitmomente wird diese Axe die feststehende Kugeloberfläche in einem Punkte und dessen Gegenpunkte schneiden. Den Ort dieser Punkte bezeichnen wir mit „Polbahn“.

Polcurve. Denkt man sich mit dem bewegten System eine Kugel vom Radius 1 fest verbunden, deren Mittelpunkt der feste Punkt des Systems ist, so wird auch diese Kugel in jedem Augenblicke von der momentanen Drehaxe in einem Punkte geschnitten, der Ort dieser Punkte und ihrer Gegenpunkte möge den Namen Polcurve führen.

Tangente. Da die Richtung der Bewegung des Poles auf der festen Kugel die Richtung der Führungsgeschwindigkeit ist, und er sich auf der bewegten Kugel in der Richtung der relativen Geschwindigkeit bewegt, so werden sich, weil beide Geschwindigkeiten gleich gerichtet sind, die beiden Polbahnen (Polbahn und Polcurve) tangiren. Ist das Element der einen Polbahn ds, das der anderen $ds_{\prime}$, so ist, wenn $\frac{ds}{dt}$ seine Führungsgeschwindigkeit ist, die ihr gleiche relative Geschwindigkeit $\frac{ds_{\prime}}{dt}$.

Aus $\frac{ds}{dt} = \frac{ds_{\prime}}{dt}$ folgt:

$ds = ds_{\prime}$, d. h. die aufeinander in gleichen Zeitelementen zurückgelegten Wegelemente sind einander gleich, es rollen also die Polbahnen aufeinander ohne zu gleiten.

Was von den Polbahnen gilt, wird auch für jedes entsprechende Curvenpaar auf concentrischen Kugelschalen eintreten. Die Gesammtheit aller dieser Polbahnen ist ein Kegelpaar, welches auf einander ohne zu gleiten rollt.

Pol $\mathfrak{P}$. Da sich in jedem Augenblicke das System in Rotation um die momentane Drehaxe befindet, so ist die Richtung der Bahn eines jeden Punktes senkrecht auf der Ebene, welche in diesem Zeitdifferenzial durch die momentane Drehaxe und den Punkt selbst bestimmt wird. Man findet daher den Pol $\mathfrak{P}$, wenn man auf zwei Bewegungsrichtungen sphärische Senkrechte errichtet, ihr Schnittpunkt ist der Pol $\mathfrak{P}$.

Hüllcurven. Jede dem bewegten sphärischen System angehörende Curve umhüllt eine andere auf der festen Kugel befindliche Curve. Zwei solcher zu einander gehöriger Curven heissen ein Hüllcurvenpaar, die bewegte Curve wird als Hüllcurve, die beschriebene als Hüllbahn bezeichnet. Das in jedem Augenblicke entstehende Stück der Hüllbahn wird von dem beschreibenden tangirt. Legt man durch diesen Berührungspunkt der Hüllcurven eine Ebene senkrecht zu ihrer gemeinschaftlichen Tangente, und construirt also hierdurch ihre Normalebene, so geht diese durch den Pol.

Die Krümmungskreise zweier Hüllcurven im gemeinschaftlichen Berührungspunkte sind kleine Kugelkreise. Schrumpft eine der Hüllcurven zu einem Punkte zusammen, so wird es auch jener Kreis thun. Die zugehörige Hüllbahn führt alsdann den Namen Roulette. Für Theile der Hüllcurven, die grösste Kugelkreiselemente sind, wird jener Krümmungskreis mit diesem grössten Kugelkreise selbst, also auch mit der gemeinschaftlichen Tangente zusammenfallen.

Die Senkrechten vom Kugelmittelpunkte auf die Ebenen der Krümmungskreise schneiden diese in den Krümmungsmittelpunkten (m_1), (m_2) und die Kugel in den sogenannten sphärischen Krümmungsmittelpunkten m_1, m_2 (s. Fig. 3).

Legt man im Pole $\mathfrak{P}$ eine Tangentialebene an die Kugel, so wird die Schnittgerade derselben mit der Normalebene des Hüllcurvenpaares jene Senkrechten in zwei ferneren Punkten $m^0{}_1$, $m^0{}_2$ schneiden. Ist es also möglich, diese Punkte zu bestimmen, so wird man aus ihnen umgekehrt durch Projection von O aus (m_1), (m_2) und m_1, m_2 finden können.

Krümmungsradien. Fig. 3. Denken wir uns die Drehung um $O\mathfrak{P}$ zerlegt in zwei Drehungen um die beiden Axen, welche durch die Krümmungsmittelpunkte der Hüllcurven gehen, und nehmen wir an, diese Axen bilden mit der momentanen Drehaxe $O\mathfrak{P}$ die Winkel γ_1 und γ_2, seien ferner τ_1, τ_2 die bereits aufeinander abgewälzten Stücke der Hüllbahnen, so wird, wenn ω_1 und ω_2 die Winkelgeschwindigkeiten um jene Axen heissen, $\omega_1 = \frac{d\tau_1}{dt}$, $\omega_2 = \frac{d\tau_2}{dt}$ werden. Nach dem oben bewiesenen Satze, dass $\omega_1 \sin\gamma_1 = \omega_2 \sin\gamma_2$ ist, folgt

$$\frac{d\tau_1}{dt}\sin\gamma_1 = \frac{d\tau_2}{dt}\sin\gamma_2.$$

Jede dieser Grössen bedeutet die absolute Geschwindigkeit, mit welcher sich der Pol $\mathfrak{P}$ um jede der Krümmungsaxen bewegt.

Ist ω die um die momentane Drehaxe stattfindende Geschwindigkeit, U die Geschwindigkeit, mit welcher die Lage des Poles auf den Systemen sich verändert, ds das Element der Polcurven, also $U = \frac{ds}{dt}$, und endlich α der Winkel, welchen die Tangente der Polcurven mit der Ebene der Krümmungsaxen bildet, so ist

$$\frac{d\tau_1}{dt}\sin\gamma_1 = \frac{d\tau_2}{dt}\sin\gamma_2 = U\sin\alpha$$

$$\omega\sin\gamma_1 = \frac{d\tau_1}{dt}\sin(\gamma_1+\gamma_2)$$

$$\omega\sin\gamma_2 = \frac{d\tau_2}{dt}\sin(\gamma_1+\gamma_2)$$

und somit

$$\frac{\omega}{U} = \frac{\sin\alpha\sin(\gamma_1+\gamma_2)}{\sin\gamma_1\sin\gamma_2} = \sin\alpha\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma_2}\right).$$

Weil $\frac{\omega}{U}$ unabhängig davon ist, welches Hüllsystem in Anwendung gebracht wurde, so folgt:

$$\sin\alpha\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma_2}\right) = \text{const.}$$

Aus Fig. 3 also, da $O\mathfrak{P} = 1$

$$\sin\alpha\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) = \text{const.}$$

Hieraus folgen die Krümmungsradien der Hüllbahnen als

$$\varrho_1 = \sin(\gamma_1+\varphi)$$
$$\varrho_2 = \sin(\gamma_2-\varphi),$$

wo $\varphi =$ Winkel $PO\mathfrak{P}$.

Sieht man die Polcurven selbst als ein Umhüllungspaar an, und bezeichnet man ihre Krümmungsradien mit P' und P'', so erhält man

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\sin\alpha = \frac{1}{R'}+\frac{1}{R''},$$

also eine Relation zwischen den Krümmungsradien der Polbahnen. Die Grössen R' und R'' stellen wieder die Tangenten der Winkel Γ' Γ'' dar, welche die Krümmungsaxen mit der momentanen Drehaxe bilden.

Es wird
$$P' = \sin \Gamma' = \frac{R'}{\sqrt{1+R'^2}}$$
$$P'' = \sin \Gamma'' = \frac{R''}{\sqrt{1+R''^2}}.$$

Bobillier'sche Construction. Fig. 4. In der Tangentialebene im Pole seien $m^0_1\, m^0_2$ die Einschnitte der Krümmungsaxen eines Hüllpaares, M^0_1, M^0_2 die eines zweiten, so liegt, wie sofort ersichtlich, $\mathfrak{P}$ im Schnittpunkte der Geraden $m^0_1\, m^0_2$ und $M^0_1\, M^0_2$.

Der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden $m^0_1\, M^0_1$ und $m^0_2\, M^0_2$ sei D^0. Der Punkt D der Kugel, in welchem die Transversale vom Kugelmittelpunkt O nach D^0 die Kugelfläche schneidet, hat eine Geschwindigkeit, welche senkrecht auf der Ebene $\mathfrak{P}\,O\,D\,D^0$ steht, ihre Projection von O auf die Tangentialebene im Pole steht also auch senkrecht auf $\mathfrak{P}\,D^0$.

Zerlegt man die Geschwindigkeit um $\mathfrak{P}$ in Geschwindigkeiten um die beiden Pole $M_1{}^0\, M_2{}^0$, so steht die Geschwindigkeit um $M_1{}^0$ senkrecht auf $M_1{}^0\, D^0$, die um $M_2{}^0 \perp$ auf $M_2{}^0\, D^0$, die Resultante beider ist die Geschwindigkeit $D^0\, R$ um $\mathfrak{P}$, die auf $D_0\, \mathfrak{P}$ senkrecht steht, also sind die Richtungen der Resultante und ihrer Componenten und ihre Grössenverhältnisse bestimmt. Nimmt man jetzt eine neue Zerlegung der Geschwindigkeit um $\mathfrak{P}$ vor, nämlich um die Punkte $m_1{}^0$ und $m_2{}^0$, so müssen die neuen Componenten wiederum senkrecht auf $m_1{}^0\, D^0$ resp. $m_2{}^0\, D^0$ stehen, also da ihre Resultante dieselbe wie vorhin ist, so müssen auch die neuen Componenten den vorigen gleich sein, d. h. die Geschwindigkeit um $M_,{}^0$ ist dieselbe wie um $m_,{}^0$ und dasselbe findet bei $m_2{}^0$ und $M_2{}^0$ statt. Würde man statt der Geschwindigkeit um $m_,{}^0$ eine gleiche, aber entgegengesetzt drehende substituiren, so würde der Punkt D_0, wenn nur die Drehungen und Geschwindigkeiten um $M_,{}^0$ und $m_,{}^0$ berücksichtigt werden, zwei gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeiten erhalten, also Pol werden. In diesem selben Falle würde Punkt $\mathfrak{P}$ um $m_,{}^0$ eine Geschwindigkeit $\mathfrak{P}\, C_, \perp m_,{}^0\, \mathfrak{P}$ erhalten, um $M_,{}^0$ eine Geschwindigkeit $\mathfrak{P}\, B \perp M_,{}^0\, \mathfrak{P}$. Die Resultante beider müsste, da D^0 Pol ist, $\perp D_0\, \mathfrak{P}$ stehn, also $B\, \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}\, C_,$ combinirt müssen ergeben $\mathfrak{P}\, G \perp \mathfrak{P}\, D^0$, folglich da bei Restituirung der alten Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{P}\, C_, = \mathfrak{P}\, C$ an die Stelle von $\mathfrak{P}\, C$ tritt, so muss, da $G\, \mathfrak{P}\, C\, B$ ein Parallelogramm, auch $B\, C \perp D^0\, \mathfrak{P}$ sein. Die wahre Geschwindigkeit des Poles $\mathfrak{P}$ liegt in der Richtung der Tangente der Polbahnen. Betrachte ich seine Geschwindigkeit um $M_,{}^0$, so werde ich seine wahre Geschwindigkeit in zwei rechtwinklige Coordinaten zu zerlegen haben, deren eine in der Richtung $M_,{}^0\, \mathfrak{P}$ liegt, deren andere $\mathfrak{P}\, B$ ist. Fasse ich die Geschwindigkeit des Poles in Bezug auf $m_,{}^0$ ins Auge, so ist die auf $m_,{}^0\, \mathfrak{P} \perp$ Componente $\mathfrak{P}\, C$. Errichte ich umgekehrt in C und B auf $\mathfrak{P}\, C$ und $\mathfrak{P}\, B$ Senkrechte, so werden diese sich im Punkt A schneiden, so dass $\mathfrak{P}\, A$ die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit von $\mathfrak{P}$ darstellt. Die Richtung dieser Geschwindigkeit liegt aber, wie schon bemerkt, in der Richtung der Polbahntangente, also ist $\mathfrak{P}\, A$ die Richtung der den Polbahnen gemeinschaftlichen Tangente.

Es ist $m_2{}^0\, \mathfrak{P}\, C = M_,{}^0\, \mathfrak{P}\, B = \frac{\pi}{2}$, also auch $B\, \mathfrak{P}\, m_2{}^0 = C\, \mathfrak{P}\, M_,{}^0$, $D^0\, \mathfrak{P} \perp B\, C$, $A\, C\, \mathfrak{P} = \frac{\pi}{2}$, also $A\, C\, B = D_0\, \mathfrak{P}\, C$, $A\, B\, \mathfrak{P}\, C$ ein Sehnenviereck, also $A\, C\, B = A\, \mathfrak{P}\, B$, folglich $A\, \mathfrak{P}\, M_,{}^0 = D^0\, \mathfrak{P}\, m_2{}^0$. Hieraus folgt die **Construction der Tangente.**

§ 3. Entwickelung der Gleichungen der zu discutirenden Curven.

Wie in der Einleitung bereits gezeigt ist, durchlaufen die Enden $AA_{\prime}$ des starren Kreuzes $\overset{C}{\underset{C_{\prime}}{ABA_{\prime}}}$ (Fig. 5) einen Kreis, der senkrecht auf der Axe D steht, und die Zapfen $CC_{\prime}$ einen solchen, der senkrecht zu E ist.

Es soll im Folgenden nur der eine Fall betrachtet werden, in welchem die gemeinschaftliche Basis der Lager festgehalten wird und das bewegte starre Kreuz rechtwinklig ist. Die Punkte A und C und ihre Gegenpunkte werden alsdann grösste Kugelkreise als Rouletten beschreiben, und die beschreibenden Punkte selbst, weil der Winkel ABC ein rechter ist, auf dem Constructionsfelde immer um 90^{0} von einander entfernt sein.

Die Untersuchung beschäftigt sich mit der Bewegung des Quadranten AC eines grössten Kugelkreises, dessen Endpunkte sich auf zwei gegebenen grössten Kugelkreisen bewegen. Die Polbahnen dieses Systems, resp. die Schnitte der Polkegel und der Kugel sind die im Folgenden zu untersuchenden Curven.

Entwickelung der Polbahn. Fig. 6. Sei xy der bewegte Quadrant. Der Punkt x beschreibt nach einander die Lagen $x_0\, x\, \eta\, \mathfrak{B}_1\, x_0 \ldots x_0$, der Punkt y durchläuft dann die Punkte $\eta\, y\, y_0 \ldots y_0\, \mathfrak{B}_2\, \eta$. Diese beiden Bahnen sind alsdann die erwähnten grössten Kugelkreise. Sind die auf ihren Ebenen im Mittelpunkt errichteten Senkrechten $O\mathfrak{A}_1$ und $O\mathfrak{A}_2$ (O der Kugelmittelpunkt), so findet man den augenblicklichen Pol $\mathfrak{P}$, indem man in den Punkten, welche die erwähnten grössten Kugelkreise als Rouletten beschreiben, auf diesen Kreisen sphärische Senkrechte errichtet, ihr Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ ist der verlangte momentane Drehpol. Die sphärischen Senkrechten gehen durch die Punkte $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, da diese geometrische Pole (um 90^{0} entfernte Punkte) der Rouletten sind. Die Gerade $O\mathfrak{P}$ ist die momentane Drehaxe des Systems.

Im sphärischen Dreieck $xy\eta$ ist $\cos xy = \cos\frac{\pi}{2} = O = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos(\varphi_1, \varphi_2)$. Bezeichnen wir den Winkel, welchen die beiden Axen, also auch die beiden Ebenen der Rouletten, mit einander bilden, mit $2\,\varepsilon$, so ist

$$\cos(\varphi_1, \varphi_2) = -\cos(x\eta y_0) = -\cos 2\,\varepsilon,$$

also folgt:

$$\operatorname{ctg}\varphi_1 \operatorname{ctg}\varphi_2 = \cos 2\,\varepsilon. \qquad \text{(I.)}$$

Die Schnittgerade $O\eta$ der beiden Roulettenebenen sei die eine Axe des unbewegten Systems, die Halbirungsebene des Roulettenebenenwinkels die $\xi\eta$ Ebene desselben und mithin die Halbirungslinie des Winkels $\mathfrak{A}_1 O \mathfrak{A}_2$ die ζ Axe, so wird, wenn man die Winkel $\xi O \mathfrak{P} = \alpha$, $\eta O \mathfrak{P} = \beta$, $\zeta O \mathfrak{P} = \gamma$ setzt und den Kugelradius als 1 annimmt, $\xi = \cos\alpha$, $\eta = \cos\beta$, $\zeta = \cos\gamma$ werden.

Errichtet man eine Senkrechte in O auf $xO\mathfrak{P}$, welche die Kugeloberfläche in $\mathfrak{B}_1$ schneidet, so liegt $\mathfrak{B}_1$ in der Ebene $x\eta$, d. h. der Rouletten-ebene, weil der Winkel $\eta x \mathfrak{P} = \frac{\pi}{2}$ ist.

Errichtet man noch eine zweite Normale auf $\mathfrak{P} O y$ in O mit dem Schnittpunkt $\mathfrak{B}_2$, so liegt dieser Punkt auf der anderen Roulette $y\eta$.

Da die beiden Geraden $O\mathfrak{B}_1$ und $O\mathfrak{B}_2$ senkrecht $O\mathfrak{P}$ sind, so genügen sie den Gleichungen

$$\cos\alpha\cos\mathfrak{B}_1\,O\,\xi+\cos\beta\cos\mathfrak{B}_1\,O\,\eta+\cos\gamma\cos\mathfrak{B}_1\,O\,\zeta=0, \qquad \text{(II.)}$$
$$\cos\alpha\cos\mathfrak{B}_2\,O\,\xi+\cos\beta\cos\mathfrak{B}_2\,O\,\eta+\cos\gamma\cos\mathfrak{B}_2\,O\,\zeta=0.$$

Nun ist, wie aus der Fig. 6 ersichtlich,

$$\cos\mathfrak{B}_1\,O\,\xi=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1\right)+\sin\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1\right)\cos(\pi-\varepsilon)$$
$$=-\cos\varphi_1\cos\varepsilon$$
$$\cos\mathfrak{B}_1\,o\,\eta=\sin\varphi_1$$
$$\cos^2\mathfrak{B}_1\,o\,\zeta=1-\cos^2\mathfrak{B}_1\,o\,\xi-\cos^2\mathfrak{B}_1\,O\,\eta=1-\cos^2\varphi_1\cos^2\varepsilon-\sin^2\varphi_1$$
$$=1-\cos^2\varphi_1\cos^2\varepsilon-1+\cos^2\varphi_1=\cos^2\varphi_1\sin^2\varepsilon, \text{ also}$$
$$\cos\mathfrak{B}_1\,o\zeta=\cos\varphi_1\sin\varepsilon.$$

In (II.) eingesetzt und geordnet etc.

$$\operatorname{ctg}\varphi_1=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha\cos\varepsilon-\cos\gamma\sin\varepsilon}$$

und ebenso

$$\operatorname{ctg}\varphi_2=\frac{-\cos\beta}{\cos\alpha\cos\varepsilon+\cos\gamma\sin\varepsilon}$$

und da (I.) $\operatorname{ctg}\varphi_1\operatorname{ctg}\varphi_2=\cos 2\varepsilon$, folgt

$$\cos 2\varepsilon=\frac{-\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\varepsilon-\cos^2\gamma\sin^2\varepsilon}$$

oder $\cos\alpha=\xi$ etc., s. o. gesetzt und geordnet

$$\frac{\xi^2}{\sin^2\varepsilon}+\frac{\eta^2}{\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}-\frac{\zeta^2}{\cos^2\varepsilon}=0.$$

Diese Gleichung stellt die Gesammtheit aller der Lagen dar, welche die Gerade $O\mathfrak{P}$ einnehmen kann, ist somit die Gleichung des Polbahnkegels. Ohne Hülfsconstruction kann man diese Gleichung wie folgt herleiten.

Andere Entwickelung der Polbahn. Die Ebene der Roulette, welche x beschreibt, hat die Gleichung $\zeta-\xi\operatorname{tg}\varepsilon=o$, die Coordinaten des Punktes x sind daher

$$\xi=\sin\varphi_{,}\cos\varepsilon,\ \ \eta=\cos\varphi_{,},\ \ \zeta=\sin\varphi_{,}\sin\varepsilon.$$

Die Gleichung der auf dieser Ebene senkrechten Ebene in x ist

$$\xi\cos\varepsilon-\eta\operatorname{tg}\varphi_{,}+\zeta\sin\varepsilon=0, \qquad \text{(I.)}$$

weil, wenn wir die Gleichung mit $A\,\xi+B\,\eta+\zeta=0$ bezeichnen würden,

$$A\operatorname{tg}\varepsilon-1=0 \text{ und } A\sin\varphi_{,}\cos\varepsilon+B\cos\varphi_{,}+\sin\varphi_{,}\sin\varepsilon=0$$

sein muss.

Der um 90^0 von x abstehende Punkt der zweiten Roulette ist Schnittpunkt der auf $o\,x$ senkrechten Ebene

$$\xi\sin\varphi_{,}\cos\varepsilon+\eta\cos\varphi_{,}+\zeta\sin\varphi_{,}\sin\varepsilon=0,$$

der Roulettenebene $\xi\operatorname{tg}\varepsilon+\zeta=0$ selbst und der Kugeloberfläche $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$, hat somit die Coordinaten

$$\xi_{,}=\frac{-\cos\varepsilon\cos\varphi_{,}}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\varphi_{,}}},\quad \eta_{,}=\frac{\cos 2\varepsilon\sin\varphi_{,}}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\varphi_{,}}}\quad\text{und}$$
$$\zeta_{,}=\frac{\sin\varepsilon\cos\varphi_{,}}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\varphi_{,}}}.$$

Bezeichnet man die auf der zweiten Roulettenebene, welche von oy beschrieben wird, senkrechte Ebene in oy mit $A\xi + B\eta + \zeta = 0$, so folgt, weil $A \operatorname{tg} \varepsilon + 1 = 0$ und $A\xi_{,} + B\eta_{,} + \zeta_{,} = 0$ werden muss, als Gleichung dieser zweiten durch $O\mathfrak{P}$ gehenden Ebene $\mathfrak{P}Oy$

$$\xi \cos\varepsilon \cos 2\varepsilon + \eta \operatorname{ctg} \varphi_{,} - \zeta \cos 2\varepsilon \sin\varepsilon = 0. \qquad \text{(II.)}$$

Eliminirt man aus (I.) und (II.) den Winkel $\varphi_{,}$, so folgt nach kurzer Umformung wiederum als Ort der Geraden $O\mathfrak{P}$

$$\frac{\xi^2}{\sin^2\varepsilon} + \frac{\eta^2}{\sin^2\varepsilon \cos^2\varepsilon \cos 2\varepsilon} - \frac{\zeta^2}{\cos^2\varepsilon} = 0.$$

Die sphärische zu discutirende Curve selbst wird also sein

$$\begin{cases} \dfrac{\xi^2}{\sin^2\varepsilon} + \dfrac{\eta^2}{\sin^2\varepsilon \cos^2\varepsilon \cos 2\varepsilon} - \dfrac{\zeta^2}{\cos^2\varepsilon} = 0 \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \end{cases}$$

Dritte Herleitung der Polbahn. Eine dritte Herleitung findet man durch Betrachtung des Dreiecks $\mathfrak{A}_2 \zeta \mathfrak{P}$. Nach der Formel

$$\sin c \cos\beta = \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos\gamma \quad \text{wird}$$

$$\sin \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2 \cos \zeta\mathfrak{A}_2\mathfrak{P} = \sin \zeta\mathfrak{A}_2 \cos \zeta\mathfrak{P} - \cos \zeta\mathfrak{A}_2 \sin \zeta\mathfrak{P} \cos \mathfrak{A}_2\zeta\mathfrak{P}$$

oder bezeichnen wir wie folgt:

$$\mathfrak{P}x = \mathfrak{a},\ \mathfrak{P}y = \mathfrak{b},\ \mathfrak{P}\zeta = \gamma,$$

und bedenken, dass

$$\zeta\mathfrak{A}_2 = \varepsilon,\ \zeta\mathfrak{A}_2\mathfrak{P} = y_0\, y = \frac{\pi}{2} - \varphi_2$$

ist, so wird diese Gleichung:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \mathfrak{b}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) = \sin\varepsilon \cos\gamma - \cos\varepsilon \sin\gamma \cos \mathfrak{A}_2\zeta\mathfrak{P}; \text{ oder}$$

$$1)\ \cos\mathfrak{b} \sin\varphi_2 = \sin\varepsilon\cos\gamma - \cos\varepsilon \sin\gamma \cos\mathfrak{A}_2\zeta\mathfrak{P}.$$

Ferner ist

$$\sin\mathfrak{P}\mathfrak{A}_2 : \sin\mathfrak{P}\zeta = \sin\mathfrak{A}_2\zeta\mathfrak{P} : \sin\zeta\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}, \text{ oder}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \mathfrak{b}\right) : \sin\gamma = \sin\mathfrak{A}_1\zeta\mathfrak{P} : \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right), \text{ also}$$

$$2)\ \cos\mathfrak{b}\cos\varphi_2 = \sin\gamma \sin\mathfrak{A}_2\zeta\mathfrak{P}$$

2) durch 1) dividirt giebt

$$3)\ \operatorname{ctg}\varphi_2 = \frac{\sin\gamma \sin\mathfrak{A}_2\zeta\mathfrak{P}}{\sin\varepsilon\cos\gamma - \cos\varepsilon\sin\gamma\cos\mathfrak{A}_2\zeta\mathfrak{P}},$$

ebenso

$$\operatorname{ctg}\varphi_1 = \frac{\sin\gamma\sin\mathfrak{A}_1\zeta\mathfrak{P}}{\sin\varepsilon\cos\gamma - \cos\varepsilon\sin\gamma\cos\mathfrak{A}_1\zeta\mathfrak{P}},$$

oder

$$4)\ \operatorname{ctg}\varphi_1 = \frac{\sin\gamma\sin\mathfrak{A}_2\zeta\mathfrak{P}}{\sin\varepsilon\cos\gamma + \cos\varepsilon\sin\gamma\cos\mathfrak{A}_2\zeta\mathfrak{P}},$$

3) mit 4) multiplicirt, giebt da $\operatorname{ctg}\varphi_1 \operatorname{ctg}\varphi_2 = \cos 2\varepsilon$

$$\cos 2\varepsilon = \frac{\sin^2\gamma\sin^2\mathfrak{A}_2\zeta\mathfrak{P}}{\sin^2\varepsilon\cos^2\gamma - \cos^2\varepsilon\sin^2\gamma\cos\mathfrak{A}_2\zeta\mathfrak{P}}.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \sin\gamma\cos\mathfrak{A}_2\,\zeta\,\mathfrak{P} &= \xi \\ \sin\gamma\sin\mathfrak{A}_2\,\zeta\,\mathfrak{P} &= \eta \\ \cos\gamma \quad &= \zeta, \end{aligned}$$

also eingesetzt

$$\cos 2\varepsilon = \frac{\eta^2}{\zeta^2\sin^2\varepsilon - \xi^2\cos^2\varepsilon}$$

oder eingesetzt und umgewandelt

$$\frac{\xi^2}{\sin^2\varepsilon} + \frac{\eta^2}{\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon} - \frac{\zeta^2}{\cos^2\varepsilon} = 0,$$

wobei
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Herleitung der Polcurve. Um die Gleichung der Polcurve zu erhalten, hat man ein mit dem beweglichen Quadranten $x\,y$ fest verbundenes Coordinatensystem anzunehmen, und zwar betrachtet man die vom Mittelpunkte O der Kugel ausgehenden, auf einander senkrechten Radien $O\,x$ und $O\,y$ als zwei, die auf ihnen lothrechte Gerade $o\,z$ als die dritte Axe des Systems.

Roulette z. Da die Bogen $\mathfrak{A}_1\,x = x\,y = y\,\mathfrak{A}_2 = \frac{\pi}{2}$ sind, so ist x geometrischer Pol zu $y\,\mathfrak{A}_1$, y zu $x\,\mathfrak{A}_2$, also z auch Schnittpunkt der Kreise $x\,\mathfrak{A}_2$ und $y\,\mathfrak{A}_1$. Die Axe $o\,x$ des beweglichen Systems beschreibt die Ebene der ersten Roulette, die Axe $o\,y$ die der andern Roulette. Die Bahn von $o\,z$ ist kein so einfaches Gebilde. Die Coordinaten von

$$\begin{array}{llllll} & \mathfrak{A}_2 & \text{sind} & \xi_1 = \sin\varepsilon, & \eta_1 = 0, & \zeta_1 = \cos\varepsilon, \\ & x & \text{„} & \xi_2 = \sin\varphi_1\cos\varepsilon, & \eta_2 = \cos\varphi_1, & \zeta_2 = \sin\varphi_1\sin\varepsilon \text{ und} \\ \text{von} & \mathfrak{A}_1 & \text{„} & \xi' = -\sin\varepsilon, & \eta' = 0, & \zeta' = \cos\varepsilon, \\ & y & \text{„} & \xi'' = -\sin\varphi_1\cos\varepsilon, & \eta'' = \cos\varphi_2, & \zeta'' = \sin\varphi_2\sin\varepsilon. \end{array}$$

Da die Gleichung einer Ebene durch den Coordinatenanfangspunkt und die Punkte

$$\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1,\ \xi_2\,\eta_2\,\zeta_2 \qquad \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix}\xi + \begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta_2 & \xi_2 \end{vmatrix}\eta + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}\zeta = 0 \text{ ist,}$$

folgt als Gleichung der Ebenen

$$\begin{aligned} x\,\mathfrak{A}_2\,z \qquad & -\cos\varphi_1\cos\varepsilon\,\xi + \sin\varphi_1\cos 2\varepsilon\,\eta + \sin\varepsilon\cos\varphi_1\,\zeta = 0, \\ y\,\mathfrak{A}_1\,z \qquad & -\cos\varphi_2\cos\varepsilon\,\xi - \sin\varphi_2\cos 2\varepsilon\,\eta - \cos\varphi_2\sin\varepsilon\,\zeta = 0, \end{aligned}$$

also $\quad \operatorname{ctg}\varphi_1\operatorname{ctg}\varphi_2 = \cos 2\varepsilon = \dfrac{\eta\cos 2\varepsilon}{\xi\cos\varepsilon - \zeta\sin\varepsilon}\;\dfrac{-\eta\cos 2\varepsilon}{\xi\cos\varepsilon + \zeta\sin\varepsilon}$ oder

$$\xi\cos^2\varepsilon + \eta^2\cos 2\varepsilon - \zeta^2\sin^2\varepsilon = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{\xi^2}{\sin^2\varepsilon} + \frac{\eta^2}{\dfrac{\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon}{\cos 2\varepsilon}} - \frac{\zeta^2}{\cos^2\varepsilon} = 0,$$

d. h. der geometrische Ort der Lagen $o\,z$ ist ein Kegel zweiten Grades. Da man für $\eta = o$ erhält

$$(\xi\cos\varepsilon - \zeta\sin\varepsilon)\,(\xi\cos\varepsilon + \zeta\sin\varepsilon) = 0,$$

so geht der Kegel durch die Geraden $O\mathfrak{A}_1$ und $O\mathfrak{A}_2$; die von z beschriebene Roulette ist also

$$\begin{cases} \dfrac{\xi^2}{\sin^2\varepsilon} + \dfrac{\eta^2}{\dfrac{\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon}{\cos 2\varepsilon}} - \dfrac{\zeta^2}{\cos^2\varepsilon} = 0 \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \end{cases}$$

Polcurve. Fig. 7. Wie oben gezeigt, gehen die auf Rouletten im Berührungspunkt errichteten sphärischen Senkrechten durch den momentanen Pol $\mathfrak{P}$. Es sollen die Längen dieser Bogen mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnet werden, die Länge des Bogens $\mathfrak{P}z$ sei $\mathfrak{c}$ (in Fig. 7 nahe bei ζ vorbeigehend), so wird seine Verlängerung $\mathfrak{P}Q = h$ bis zur xy Ebene $h = \frac{\pi}{2} - c$ sein.

Bezeichnet man noch die Winkel, welche $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit xy bilden, als w_2 und w_1, so folgt:

$$\sin h : \sin\mathfrak{a} = \sin w_2 : \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\text{oder } \sin h = \sin\mathfrak{a}\sin w_2,$$

$$\sin h : \sin\mathfrak{b} = \sin w_1 : \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\text{also auch } \sin h = \sin\mathfrak{b}\sin w_1,$$

mithin
$$\sin h = \cos\mathfrak{c} = \sin\mathfrak{a}\sin w_2 = \sin\mathfrak{b}\sin w_1.$$

Ferner ist

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2\cos xy + \sin\varphi_2\sin xy\cos\left(\frac{\pi}{2} - w_1\right) = \sin\varphi_2\sin w_1$$

$$\cos\varphi_2 = \sin\varphi_1\sin w_2, \text{ also}$$

$$\sin w_1 \,.\, \sin w_2 = \frac{\cos\varphi_1 \,.\, \cos\varphi_2}{\sin\varphi_2 \,.\, \sin\varphi_1} = \operatorname{ctg}\varphi_1\operatorname{ctg}\varphi_2 = \cos 2\varepsilon;$$

multiplicirt man die oben gefundenen Gleichungen

$$\cos\mathfrak{c} = \sin\mathfrak{a}\sin w_2$$
$$\underline{\cos\mathfrak{c} = \sin\mathfrak{b}\sin w_1}$$

miteinander, so folgt:

$$\cos^2\mathfrak{c} = \sin\mathfrak{a}\sin\mathfrak{b}\sin w_1\sin w_2,$$
$$\text{oder } \cos^4\mathfrak{c} = \sin^2\mathfrak{a}\sin^2\mathfrak{b}\sin^2 w_1\sin^2 w_2$$
$$\cos^4\mathfrak{c} = (1-\cos^2\mathfrak{a})(1-\cos^2\mathfrak{b})\cos^2 2\varepsilon.$$

Da $\cos^2\mathfrak{a} + \cos^2\mathfrak{b} + \cos^2\mathfrak{c} = 1$, so kann man schreiben

$$\cos^4\mathfrak{c} = (\cos^2\mathfrak{b} + \cos^2\mathfrak{c})(\cos^2\mathfrak{a} + \cos^2\mathfrak{c})\cos^2 2\varepsilon$$

und da $\cos^2\mathfrak{a} = x^2$, $\cos^2\mathfrak{b} = y^2$, $\cos^2\mathfrak{c} = z^2$,

folgt als Gleichung der Polcurve:

$$\begin{cases} (y^2+z^2)(x^2+z^2)\cos^2 2\varepsilon - z^4 = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1. \end{cases}$$

Da sich die Punkte

$$\begin{matrix} x: & x_0 & \eta & -x_0 & -\eta & x_0 \\ \mathfrak{P}: & \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_1 \end{matrix}$$

entsprechen, so ist die Polcurve doppelt so lang als die Polbahn.

§ 4. Die Polbahn:

$$\frac{\xi^2}{\sin^2\varepsilon}+\frac{\eta^2}{\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}-\frac{\zeta^2}{\cos^2\varepsilon}=0$$

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1.$$

Projection $\xi\eta$. Die Projection des Durchschnitts dieser beiden Flächen, also der zu discutirenden Curve auf die $\xi\eta$ Ebene ist:

$$\text{die Ellipse } \frac{\xi^2}{\sin^2\varepsilon}+\frac{\eta^2}{\dfrac{\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}}=1.$$

Weil die Längen beider Axen sich als echte Brüche darstellen, liegt diese Ellipse ganz innerhalb des Kreises, der die Projection der Kugel ist. Da $\sin^2\varepsilon > \sin^2\varepsilon\dfrac{\cos 2\varepsilon}{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}$, so ist die ξ Axe die grosse, die η Axe die kleine Axe. Die erstere wächst ersichtlich mit ε, die kleine Axe thut dies nicht in dieser Weise, da $\cos 2\varepsilon$ mit wachsendem ε abnimmt, und schon für $\varepsilon=45^0$ zu Null wird.

Maxima und Minima dieser Projection. Die Ableitung von

$$\frac{\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon} \text{ ist } \frac{2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\,(1-4\sin^2\varepsilon)}{(1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)^2}$$

dies gleich Null gesetzt giebt

1) $\varepsilon=0$, die kleine Axe $=0$, Minimum.

2) $\varepsilon=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$, die kleine Axe $\sqrt{-\frac{1}{2}}$ ist imaginär, dieser Fall kommt also nur insofern in Betracht, als er zeigt, dass ε nie $\frac{\pi}{2}$ werden darf.

3) $1-4\sin^2\varepsilon=0$, $\varepsilon=30^0$, die kleine Axe wird $\frac{1}{3}$, sie ist ein Maximum.

Die Grösse $\dfrac{\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}$ darf nicht negativ werden, dies tritt aber ein, wenn $2\varepsilon > 90^0$ wird, also darf ε die Grenzen 45^0 und 0^0 (resp. -45^0) nicht überschreiten. Für $\varepsilon=45^0$ wird die Projection zu $\eta^2=0$, d. h. zur ξ Axe der Projectionsebene.

Projection $\xi\zeta$. Die Projection auf die $\xi\zeta$ Ebene ist die Ellipse

$$\frac{\xi^2}{\dfrac{1}{1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}}+\frac{\zeta^2}{\dfrac{1}{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}}=1.$$

Der erste der beiden Nenner ist grösser als 1, also ist die grosse Axe dieser Ellipse grösser als der Kugelradius.

Für $\varepsilon=0$ erhalten wir als Gleichung der Projection $\zeta=\pm 1$, die Gleichung der Tangente der Kugelprojection.

Für $\varepsilon=30^0 \; \dfrac{\xi^2}{8/5}+\dfrac{\zeta^2}{8/9}=1$; $\varepsilon=45^0$ liefert $\xi^2+\zeta^2=1$, die Peripherie selbst.

Projection $\eta\zeta$. In der $\eta\zeta$ Ebene wird die Projection

$$\frac{\zeta^2}{\cos^2\varepsilon} - \frac{\eta^2}{\frac{\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}{1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}} = 1,$$

eine Hyperbel, da die Grösse $\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon$ innerhalb der Grenzen 0^0 und 45^0 ein positiver echter Bruch bleibt. Die ζ Axe ist also die reelle, die η Axe die imaginäre.

Für die Grenzlagen wird für $\varepsilon = 0$ die Gleichung zu $\zeta = \pm 1$, für $\varepsilon = 30^0$ zu $\frac{\zeta^2}{{}^3/_4} - \frac{\eta^2}{{}^3/_5} = 1$ und für $\varepsilon = 45^0$ zu $\eta^2 = 0$ d. h. zur ζ Axe. Die 3 Coordinatenebenen schneiden den Kegel in $\xi = 0$, $\eta = 0$, dem Anfangspunkt, $(\xi - \zeta\,\mathrm{tg}\,\varepsilon)\;(\xi + \zeta\,\mathrm{tg}\,\varepsilon) = 0$, den Lagen der ursprünglichen Drehaxen und $(\eta - \zeta\sin\varepsilon\sqrt{\cos 2\varepsilon})\;(\eta + \zeta\sin\varepsilon\sqrt{\cos 2\varepsilon}) = 0$ zwei neuen Geraden, die für $\varepsilon > 45^0$ imaginär werden.

Grenzen von ε. Lässt man ε von $0^0 - 45^0$ wachsen, so wird der Kegel zuerst als ζ Axe auftreten, der Winkel, den die in $\xi\zeta$ liegenden Kegelkanten mit der ζ Axe bilden, also Null sein, derselbe ist immer gleich ε, und wächst mit diesem bis 45^0.

Der Winkel, den die Kegelkante in der Ebene $\eta\zeta$ mit der ζ Axe bildet, ist ebenfalls für $\varepsilon = 0$, Null, wächst alsdann mit ε, so dass das Quadrat seiner Tangente $= \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon$ ist, erreicht bei $\varepsilon = 30^0$ ein Maximum von $19^0\ 28'\ 16,''5$.. und nimmt dann ab, so dass er für $\varepsilon = 45^0$ wieder Null wird.

Gleichung in Polarcoordinaten. Wird der Winkel, den irgend eine Kegelkante mit der ζ Axe bildet, mit γ bezeichnet, und bildet die Ebene dieser beiden Geraden mit der $\zeta\xi$ Ebene den Winkel ψ, so drückt sich in diesen Coordinaten die Gleichung der Curve aus durch

$$\mathrm{tg}^2\gamma = \frac{\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}{\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon + \sin^2\psi\,(1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)}.$$

Aus dieser Formel folgt sofort, dass γ ein Maximum wird für $\delta = 0$, nämlich $\gamma = \varepsilon$, ein Minimum für $\delta = \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{tg}^2\gamma = \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon$, jedem beliebigen Werthe von δ aber zwei Werthe von γ entsprechen, deren Tangenten sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden.

Die auf der positiven ζ Seite liegende Halbkugel und der Kegel schneiden sich mithin in einer geschlossenen Curve, die natürlich auf der andern Halbkugel ihre Wiederholung findet. Jede dieser beiden Curven findet im Austritt der ζ Axe einen Mittelpunkt, von dem ihr Schnittpunkt mit der $\xi\zeta$ Ebene am weitesten, der mit der Ebene $\zeta\eta$ am wenigsten weit absteht.

Brennpunkte. Der Kegel $\frac{\xi^2}{\sin^2\varepsilon} + \frac{\eta^2}{\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon} - \frac{\zeta^2}{\cos^2\varepsilon} = 1$ wird von der Ebene $\zeta = \cos\varepsilon$ in der Ellipse $\frac{\xi^2}{\sin^2\varepsilon} + \frac{\eta^2}{\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon} = 1$ geschnitten.

Die Excentricität derselben ist $\pm\sin\varepsilon\sqrt{1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}$. Projicirt man die Brennpunkte durch Parallele zur ζ Axe auf die Kugel, so stehen diese Punkte der $\xi\zeta$ Ebene vom Austritt der ζ Axe um einen Bogen τ ab, so dass $\sin^2\tau = \sin^2\varepsilon\;(1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)$, $\cos^2\tau = \cos^2\varepsilon\,(1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)$ wird.

Ist der Kreis Fig. 8 die Projection der Kugel in $\xi\zeta$, Z der Austritt der ζ Axe, sind OS und $OS_{,}$ die beiden äussersten Kegelkanten, f und $f_{,}$ die Brennpunkte der ebenen Ellipse in $\zeta = \cos\varepsilon$, fF, $f_{,}F_{,}$ die Projectionsstrahlen dieser Punkte bis zur Kugel, und sind FP und $F_{,}P$ sphärische Gerade nach einem Punkt P der Curve, so kann man folgende Gleichungen aufstellen:

$$\operatorname{tang}\frac{FP+PF_{,}}{2} : \operatorname{tang} ZF_{,} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{ZFP}{2}\operatorname{ctg}\frac{ZF_{,}P}{2}+1}{\operatorname{ctg}\frac{ZFP}{2}\operatorname{ctg}\frac{ZF_{,}P}{2}-1}$$

und daraus folgt, wenn man zur Abkürzung setzt $FZ = F_{,}Z = \tau$,

$$F_{,}P = u,\quad FP = v,\quad ZFP = \alpha,\quad ZF_{,}P = \beta$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{u+v}{2}+\operatorname{tg}\tau}{\operatorname{tg}\frac{u+v}{2}-\operatorname{tg}\tau} = \left(\frac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\sin\beta}+\operatorname{ctg}\beta\right).$$

Bezeichnet man, wie es obenstehend geschehen ist, den Winkel $F_{,}ZP$ mit ψ, ZP mit γ, so ergiebt sich, wenn man in Betracht zieht, dass

$$\operatorname{ctg}^2\gamma = \frac{\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon + \sin^2\psi(1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)}{\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\tau\operatorname{ctg}\gamma+\cos\tau\cos\psi}{\sin\psi}$$

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin\tau\operatorname{ctg}\gamma-\cos\tau\cos\psi}{\sin\psi}$$

ist,

$$\operatorname{tg}\frac{u+v}{2} = \operatorname{tg}\varepsilon.$$

Die zu discutirende Curve hat also die Eigenschaft, dass die sphärische Entfernung ihrer Punkte von 2 festen Punkten constant ist, sie überträgt mithin eine Haupteigenschaft der Ellipse aus der Ebene auf die Kugel, und führt daher den Namen: sphärische Ellipse.

Man überträgt nun auch andere in der Ebene gebräuchliche Bezeichnungen auf diese sphärische Curve, so nennt man $SZS_{,}$ in Fig. 8 die grosse Axe der Ellipse, die darauf Senkrechte die kleine Axe, $FF_{,}$ die Brennpunkte und ZF die Excentricität.

Es ist wie oben gezeigt $\cos\frac{u+v}{2} = \cos\varepsilon$. Führt man statt v seine Ergänzung v' zu π ein, also den Bogen vom Gegenpunkte von F bis P, so folgt (also $v+v'=\pi$)

$$\cos\varepsilon = \cos\frac{u+(\pi-v')}{2} = \cos\left(\frac{u-v'}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \text{ oder}$$

$$\varepsilon = \frac{u-v'}{2}+\frac{\pi}{2},\quad v'-u = \pi - 2\varepsilon.$$

Es ist somit ... P.. auch der Ort aller Punkte, deren Differenz von zwei festen Punkten constant ist, die zu discutirende Curve entspricht also auch der Hyperbel.

Parameter. Unter den Radienvectoren, welche vom Brennpunkte aus gezogen werden können, ist der von gewisser Bedeutung, der auf der grossen Axe senkrecht steht. Er möge mit p bezeichnet werden, und sein zugehöriger anderer Radiusvector mit q, so bilden p, q, 2τ ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, es ist also

$$\cos q = \cos 2\tau \,.\, \cos p.$$

$$\sin q = \sqrt{1 - \cos^2 2\tau \cos^2 p},$$

$$\cos 2\varepsilon = \cos(p+q) = \cos^2 p \cos 2\tau + \sin p \sqrt{1 - \cos^2 2\tau \cos^2 p}$$

etc. endlich

$$\operatorname{tang} p = \frac{\cos 2\tau - \cos 2\varepsilon}{\sin 2\varepsilon}$$

oder

$$(1) \quad \operatorname{tang} p = \sin\varepsilon \cos\varepsilon \cos 2\varepsilon = \frac{\sin 4\varepsilon}{4}.$$

Gleichung für $F_{\prime}$ als Anfangspunkt. Die Gleichung der sphärischen Ellipse für den Brennpunkt $F_{\prime}$ als Anfangspunkt des Systems ergiebt sich wie folgt:

$$\cos v = \cos u \cos 2\tau - \sin u \sin 2\tau \cos\varphi = \cos(2\varepsilon - u)$$

also

$$\cos u \cos 2\tau - \sin u \sin 2\tau \cos\varphi = \cos 2\varepsilon \cos u + \sin 2\varepsilon \sin u$$

$$\cos 2\tau - \cos 2\varepsilon = \operatorname{tang} u (\sin 2\varepsilon + \sin 2\tau \cos\varphi)$$

oder

$$\operatorname{tang} u = \frac{\operatorname{tang} p}{1 + \dfrac{\sin 2\tau}{\sin 2\varepsilon}\cos\varphi} \qquad \text{s. (1.)}$$

Centralprojection. Nennt man die kurze Axe der Ellipse b, so wird diese sich ausdrücken durch $\operatorname{tang}^2 b = \sin^2\varepsilon \cos 2\varepsilon$, die Gleichung des Kegels kann man daher auch schreiben

$$\frac{\xi^2}{\operatorname{tang}^2\varepsilon} + \frac{\eta^2}{\operatorname{tang}^2 b} - \zeta^2 = 0.$$

In der Centralprojection vom Kugelmittelpunkt auf die Tangentialebene in Z drückt sich dies aus als

$$\frac{\Xi^2}{\operatorname{tg}^2\varepsilon} + \frac{H^2}{\operatorname{tg}^2 b} - 1 = 0, \text{ wo } \Xi = \frac{\xi}{\zeta},\ H = \frac{\eta}{\zeta}$$

wird.

Auch die Construction der sphärischen Ellipse ist wie die Punktconstruction der ebenen, denn ist, siehe Fig. 9, $\zeta P Q$ ein Radius und K ein kleiner Kugelkreis, dessen sphärischer Radius ε ist, k ein kleiner Kugelkreis, dessen sphärischer Radius $b\,(\operatorname{tang}^2 b = \sin^2\varepsilon \cos 2\varepsilon)$ ist, φ der Winkel, den der Radius $\zeta P Q$ mit $\xi\zeta$ macht, so ist im sphärischen Dreieck $\xi P \zeta$

$$\cos P\xi = \sin\zeta P \cos\varphi$$

$$\sin P\xi : \sin P\zeta = \sin\varphi : \sin P\xi\zeta$$

$$\sin P\xi\zeta = \frac{\sin\varphi \,.\, \sin P\zeta}{\sin P\xi} = \frac{\sin\varphi \sin b}{\sin P\xi}$$

$$\operatorname{tang} P\xi\zeta = \frac{\sin b \,.\, \sin\varphi}{\sqrt{\sin^2 P\xi - \sin^2 b \sin^2\varphi}} = \frac{\sin b \sin\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 b \cos^2\varphi - \sin^2 b \sin^2\varphi}}$$

$$\operatorname{tang} P\xi\zeta = \operatorname{tang} b \sin\varphi$$

im Dreieck $\zeta Q \eta$ ist

$$\cos Q\eta = \sin \zeta Q \sin \varphi = \sin \varepsilon \sin \varphi$$

$$\sin Q \eta \zeta = \frac{\sin \varepsilon \cos \varphi}{\sin Q \eta}, \quad \text{tang } Q \eta \zeta = \text{tang}\, \varepsilon \,.\, \cos \varphi.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die Gleichung der Ebene $P\xi$ ist $\eta - \zeta \operatorname{tg} b \sin \varphi = 0$, die der Ebene ηQ ebenso $\xi - \zeta \operatorname{tg} \varepsilon \cos \varphi = 0$ hieraus φ eliminirt

$$\frac{\xi^2}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} + \frac{\eta^2}{\operatorname{tg}^2 b} - \zeta^2 = 0$$

die Gleichung des Kegels, der aus der Kugel die Ellipse schneidet, $\mathfrak{P}$ ist der construirte Ellipsenpunkt.

Neue Veriable. Führt man φ als vierte Unbekannte ein, so erhalten wir die Gleichungen der Curve in der Form

$$\xi^2 = \frac{\sin^2 \varepsilon \cos^2 \varphi}{1 - \sin^2 \tau \sin^2 \varphi}$$

$$\eta^2 = \frac{\sin^2 \varepsilon \cos^2 \varepsilon \cos 2\, \varepsilon \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \tau \sin^2 \varphi}$$

$$\zeta^2 = \frac{\cos^2 \varepsilon}{1 - \sin^2 \tau \sin^2 \varphi}$$

Beweis für 3 Mittelpunkte. Es ist oben bereits gesagt, dass der Austritt der ζ Axe ein Mittelpunkt der Curve sei, das heisst, dass jede durch ζ nach einem Punkte P gezogene Sehne in ζ halbirt werde, aber auch die Endpunkte der ξ und der η Axe auf der Kugel sind Mittelpunkte.

Beweis: Ist $x = +a$, $y = +b$, $z = +c$ ein Punkt der Curve, so sind auch die Punkte

$$x = +a,\ y = +b,\ z = -c;\quad x = -a,\ y = -b,\ z = +c;$$
$$x = +a,\ y = -b,\ z = +c;\quad x = -a,\ y = +b,\ z = -c;$$
$$x = -a,\ y = +b,\ z = -c;\quad x = +a,\ y = -b,\ z = +c;$$

und endlich $x = -a$, $y = -b$, $z = -c$ Punkte der Curve, die nebeneinanderstehenden, ferner der erste und letzte sind Gegenpunkte, ihre Entfernung $= \pi$. Bezeichnet man einen Punkt mit den Vorzeichen ijk durch P_{ijk} und sind die 4 Brennpunkte F_1, F_2 ; f_1 ; f_2, so dass $F_1 F_2$ positives ζ F_1, f_2 positives ξ haben, und verbindet man die Punkte P_{ijk} mit den Brennpunkten, so entstehen nachstehende vier Schaaren congruenter Dreiecke

$\alpha)\ F_1 P_{+++} F_2$	$F_1 P_{++-} F_2$	$F_1 P_{+++} f_2$	$F_1 P_{-++} f_2$	$(\alpha$
$\beta)\ F_1 P_{+-+} F_2$	$F_1 P_{+--} F_2$	$F_1 P_{+-+} f_2$	$F_1 P_{--+} f_2$	$(\beta$
$\beta)\ F_2 P_{-++} F_1$	$F_2 P_{-+-} F_1$	$f_2 P_{++-} F_1$	$f_2 P_{-+-} F_1$	$(\beta$
$\alpha)\ F_2 P_{--+} F_1$	$F_2 P_{---} F_1$	$f_2 P_{+--} F_1$	$f_2 P_{---} F_1$	$(\alpha$
$\gamma)\ f_2 P_{++-} f_1$	$f_2 P_{+++} f_1$	$F_2 P_{-++} f_1$	$F_2 P_{+++} f_1$	$(\gamma$
$\delta)\ f_2 P_{+--} f_1$	$f_2 P_{+-+} f_1$	$F_2 P_{--+} f_1$	$F_2 P_{+-+} f_1$	$(\delta$
$\delta)\ f_1 P_{-+-} f_2$	$f_1 P_{-++} f_2$	$f_1 P_{-+-} F_2$	$f_1 P_{++-} F_2$	$(\delta$
$\gamma)\ f_1 P_{---} f_2$	$f_1 P_{--+} f_2$	$f_1 P_{---} F_2$	$f_1 P_{+--} F_2$	$(\gamma$

Ordnet man nun je 2 in Zeilen mit gleicher Bezeichnung stehende congruente Dreiecke zusammen, so bilden diese sphärische Vierecke mit gleichen Gegenseiten, diese aber haben die Eigenschaft der entsprechenden ebenen Vierecke, dass ihre Diagonalen sich halbiren.

Die einen der Diagonalen sind immer $F_2 F_1$; $F_1 f_2$; $f_2 f_1$; $f_1 F_1$ also sind deren Mitten, das sind die Austrittspunkte der ξ und ζ Axen, Mittelpunkte der Curve. Aber auch der Austritt der η Axe ist ein solcher, denn betrachtet man ein sphärisches Zweieck, wie z. B. $F_1 P_{+++} f_1 P_{-+-} F_1$, so kann dasselbe ebenfalls als Viereck mit gleichen Gegenseiten angesehen werden, denn $F_1 P_{+++}$ ist $= f_1 P_{-+-}$, $P_{+++} P_{-+-}$ ist aber eine Sehne der Curve, zugleich Diagonale des Vierecks und wird als solche durch die Mitte η der andern Diagonale $f_1 F_1$ halbirt. (Der Ort der Mitte $f_1 F_1$ ist eigentlich ein grösster Kugelkreis, dieser schneidet aber $P_{+++} P_{-+-}$ in η.) Die sphärische Ellipse hat mithin die Austrittspunkte der Axen zu Mittelpunkten, also drei (resp. mit Gegenpunkten sechs) Mittelpunkte.

Tangente. Die Construction der Tangente lässt sich nach § 2 ausführen. Andererseits kann man die Tangente als die Durchschnittsgerade der Kegeltangentialebene mit der Tangentialebene der Kugel betrachten. Eine beliebige Ebene $A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0$ schneidet den Kegel $\frac{\xi^2}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} + \frac{\eta^2}{\sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon} - \zeta^2 = 0$ in einer Curve, deren Projection auf die $\xi\eta$ Ebene ist:

$$\left(\frac{C^2}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} - A^2\right)\xi^2 + \left(\frac{C^2}{\sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon} - B^2\right)\eta^2 - 2AB\xi\eta - 2AD\xi$$
$$- 2BD\eta - D^2 = 0.$$

Soll die Ebene nun den Kegel tangiren, so muss zunächst $D = 0$ werden, da die Tangentialebene durch den Coordinatenanfangspunkt geht, es wird ferner eine ihr parallele Ebene den Kegel in einer Parabel schneiden müssen, also

$$A^2 B^2 - \left(\frac{C^2}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} - A^2\right)\left(\frac{C^2}{\sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon} - B^2\right) = 0 \text{ werden,}$$

d. i.:
$$A^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon + B^2 \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon = C^2.$$

Soll die Tangentialebene durch irgend einen Punkt $\lambda\mu\nu$ gehen, und setzt man $\frac{A}{C} = G$, $\frac{A}{B} = H$, so erhält man zu ihrer Gleichung $G\xi + H\eta + \zeta = 0$ die Bedingungen $G\lambda + H\mu + \nu = 0$ und $G^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon + H^2 \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon = 1$; hieraus folgt

$$G = \frac{-\lambda\nu \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon \pm \mu \sqrt{\lambda^2 \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon + \mu^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon - \nu^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}}{\lambda^2 \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon + \mu^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon}$$

$$H = \frac{-\mu\nu \operatorname{tg}^2 \varepsilon \pm \lambda \sqrt{\lambda^2 \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon + \mu^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon - \nu^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}}{\lambda^2 \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon + \mu^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon},$$

wo $+\,+$ und ebenso $-\,-$ je für sich zusammengehören. Es sind also zwei Ebenen möglich für jeden Punkt des äusseren Kegelraumes, weil für ihn die Grösse unter der Wurzel positiv ist, wird diese $= 0$, oder ist

$$\operatorname{tg}^2 \varepsilon \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon \left(\frac{\lambda^2}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} + \frac{\mu^2}{\sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon} - \nu^2\right) = 0,$$

was eintritt, wenn $\lambda\mu\nu$ Coordinaten eines Punktes der Fläche werden, nur eine Ebene. Die Gleichung der Ebene wird alsdann

$$\frac{\xi\lambda}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} + \frac{\eta\mu}{\sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon} - \zeta\nu = 0,$$

was sich auch aus der gewöhnlichen Tangentenformel sofort ergiebt; es kommt noch hinzu die Gleichung der Kugel im Punkte $\lambda \mu \nu$: $\xi \lambda + \eta \mu + \zeta \nu - 1 = 0$.

Für Punkte im Kegelinnern wird die Quadratwurzel imaginär, durch diese lassen sich also keine Tangentialebenen an den Kegel legen.

Kreisschnitt. Der Kegel $\frac{\xi^2}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} + \frac{\eta^2}{\sin^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon} - \zeta^2 = 0$ wird von einer Ebene $A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0$ in eine Curve geschnitten, die sich, wie wir auf voriger Seite bereits sahen, auf die $\xi\eta$ Ebene als Curve zweiten Grades projicirt. Um die Curve selbst zu untersuchen, bringe ich die Gleichung auf ein System, dessen $\xi' \eta'$ Ebene die schneidende Ebene selbst ist, dessen Anfangspunkt ihr Schnittpunkt mit der ursprünglichen η Axe und dessen ξ' Axe ihr Schnitt mit der $\xi\eta$ Ebene ist, also s. Fig. 10 G Anfangspunkt, GF ξ' Axe. Bezeichnet man noch $OG = g$, Winkel $OFG = \psi$, so folgen die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' \cos \psi - \eta' \sin \psi \cos \vartheta \\ \eta &= g + \xi' \sin \psi + \eta' \cos \psi \cos \vartheta \\ \zeta &= \eta' \sin \vartheta, \end{aligned}$$

wo wir unter ϑ den Neigungswinkel der Schnittebene gegen die $\xi\eta$ Ebene, also HIK verstehen. Substituirt man diese in die Kegelgleichung, so folgt

$$\left(\frac{\cos^2 \psi}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} + \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon}\right) \xi'^2 + \left(\frac{\sin^2 \psi \cos^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} + \frac{\cos^2 \psi \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon} - \sin^2 \vartheta\right) \eta'^2$$

$$+ 2 \frac{1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon} \sin \psi \cos \psi \cos \vartheta \, \xi' \eta' + 2 \frac{g \sin \psi}{\sin^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon} \xi'$$

$$+ 2 \frac{g \cos \psi \cos \vartheta}{\sin^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon} \eta' + \frac{g^2}{\sin^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon} = 0.$$

Die Schnittcurve ist also eine Curve zweiten Grades. Von besonderem Interesse ist es, zu untersuchen, wann dieselbe ein Kreis wird.

Die Bedingungen, dass die Curve ein Kreis wird, sind:

$$\text{(I.)} \quad \frac{\cos^2 \psi}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} + \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon} = \left(\frac{\sin^2 \psi}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} + \frac{\cos^2 \psi}{\sin^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon}\right) \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta,$$

$$\text{(II.)} \quad (1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon) \sin \psi \cos \psi \cos \vartheta = 0.$$

Da $1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon$ nur für den Grenzfall $\varepsilon = 0$ zu Null wird, kommt nur in Betracht $\sin \psi \cos \psi \cos \vartheta = 0$.

Dies liefert $\psi = 0$ oder $\psi = \frac{\pi}{2}$ oder $\vartheta = \frac{\pi}{2}$,

1) $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ in (I.) substituirt wird diese Gleichung zu

$$\frac{\cos^2 \psi}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} + \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon} = -1.$$

Da die linke Seite die Summe zweier Quadrate, so giebt es kein reelles ψ, für welches die Gleichung erfüllt würde.

2) $\psi = \frac{\pi}{2}$, (I.) wird zu $\frac{1}{\sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon} = \frac{\cos^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} - \sin^2 \vartheta$,

$$\text{d. i. } \sin \vartheta = \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \frac{1}{\cos 2\varepsilon}},$$

nur reell für $\varepsilon = 0$, den erwähnten Grenzfall.

3) $\psi = 0$. Dies ergiebt $\sin^2 \vartheta = \frac{1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}{1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}$,

einen stets reellen Werth. Die Grösse g kommt in der Bedingung nicht mehr vor, also ist die ganze Schaar unter jenem Winkel ϑ liegender Ebenen, die parallel der ξ Axe sind ($\psi = 0$), an der Eigenschaft betheiligt, den Kegel in Kreisen zu schneiden, ebenso sind es alle unter dem Winkel $\pi - \vartheta$ gegen die $\xi\eta$ Ebene geneigten ξ parallelen Ebenen, da auch für diese

$$\sin^2(\pi - \vartheta) = \sin^2 \vartheta = \frac{1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}{1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}$$

ist. Von diesen Ebenen sind eigentlich zwei ausgenommen, und zwar diejenigen, welche durch den Kugelmittelpunkt gehen, da für sie die Kreise zu Punkten zusammenschrumpfen.

Cyclische Bogen. Ihre Gleichungen werden sein

$$\zeta - \eta \operatorname{tg} \vartheta = 0 \text{ und } \zeta + \eta \operatorname{tg} \vartheta = 0,$$

oder gemeinschaftlich, wenn man den Werth für ϑ einsetzt,

$$\zeta^2 - \eta^2 \frac{1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}{\cos 2\varepsilon} = 0,$$

dieselben werden als die Ebenen der cyclischen Bogen, oder insofern nur ihre Schnitte mit der Kugel in Betracht kommen, kurz als die cyclischen Bogen bezeichnet. In der Normalform haben diese Ebenen die Gleichungen

$$\zeta \sqrt{\frac{\cos 2\varepsilon}{1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}} + \eta \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}{1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}} = 0 \text{ und}$$

$$\zeta \sqrt{\frac{\cos 2\varepsilon}{1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}} - \eta \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}{1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}} = 0.$$

Die Entfernung eines Punktes $\xi\eta\zeta$ von einer von ihnen, drückt sich also durch die linke Seite dieser betreffenden Gleichung aus, das Product der Entfernungen von beiden Ebenen ist also für Einen Punkt $\xi\eta\zeta$

$$\frac{\zeta^2 \cos 2\varepsilon - \eta^2 (1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon)}{1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}$$

und ist der Punkt ein Punkt der sphaerischen Ellipse, so dass werden:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \frac{\xi^2}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} + \frac{\eta^2}{\sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon} - \zeta^2 = 0,$$

mithin

$$\eta^2 = \frac{(\sin^2 \varepsilon - \xi^2) \cos 2\varepsilon}{1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}, \quad \zeta^2 = \frac{1 - \xi^2 (1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon)}{1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon},$$

so wird das

$$\text{Product der Entfernungen} = \frac{\cos^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}{1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon},$$

also constant, es gilt mithin der Satz: Das Product der sinus der sphärischen Normalen, die von einem Punkte der sphärischen Ellipse auf die cyclischen Bogen gefällt werden, ist constant. In der Ebene ist das Product der von einem Hyperbelpunkt auf die Asymptoten gefällten Lothe constant, die cyclischen Bogen entsprechen also hier den Asymptoten der ebenen Hyperbel, sie theilen aber noch viele andere Eigenschaften derselben.

Die Projection unserer Curve auf die $\eta\zeta$ Ebene ist (s. S. 16) die Hyperbel

$$\frac{\zeta^2}{\cos^2\varepsilon} - \frac{\eta^2}{\dfrac{\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}{1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}} = 1,$$

deren Asymptoten haben aber die Gleichung

$$\zeta^2 - \frac{1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}{\cos 2\varepsilon}\eta^2 = 0,$$

die Gleichung der cyclischen Bogen. Die cyclischen Bogen sind also diejenigen sphärischen Geraden, deren Projection auf die $\eta\zeta$ Ebene die Asymptoten der Projection der Curve auf diese Ebene werden.

Wenn irgend ein grösster Kreis (s. Fig. 11) eine sphärische Ellipse in den Punkten P und Q und die cyclischen Bogen in A und B schneidet, so wird $AP = BQ$.

Beweis: Fällt man von den Punkten P und Q auf die cyclischen Bogen Normale PL, PM und QL' QM', so ist

$$\sin AP : \sin AQ = \sin PL : \sin QL'$$
$$\sin BQ : \sin BP = \sin QM' : \sin PM,$$

nach dem Satz auf voriger Seite ist

$$\begin{aligned}
&\sin PL \,.\, \sin PM = \sin QM' \,.\, \sin QL', \text{ also}\\
&\sin PL : \sin QL' = \sin QM' : \sin PM, \text{ also}\\
&\sin AP : \sin AQ = \sin BQ : \sin BP\\
&\sin AP : \sin(AP + PQ) = \sin QB : \sin(BQ + PQ)\\
&\sin AP \sin BQ \cos PQ + \sin AP \sin PQ \cos BQ =\\
&\sin BQ \sin AP \cos PQ + \sin QB \cos AP \sin PQ,\\
&\qquad \operatorname{tang} AP = \operatorname{tang} BQ \text{ oder}\\
&\qquad AP = BQ.
\end{aligned}$$

Sind Fig. 12 OC_1, OC_2 die cyclischen Bogen, Oc_1, Oc_2 Senkrechte auf ihnen, also c_1 und c_2 ihre geometrischen Pole, $\mathfrak{P}m_1$ und $\mathfrak{P}m_2$ Lothe vom Punkte $\mathfrak{P}$ des sphärischen Kegelschnitts auf die Ebenen der cyclischen Bogen, so ist Oc_1 parallel $\mathfrak{P}m_1$ und Oc_2 parallel $\mathfrak{P}m_2$, also Winkel $m_1\mathfrak{P}O = \mathfrak{P}Oc_1$ und $m_2\mathfrak{P}O = \mathfrak{P}Oc_2$.

Diese Winkel werden durch die Bogen $\mathfrak{P}c_2$ und $\mathfrak{P}c_1$ dargestellt.

Aus $\mathfrak{P}m_1 \,.\, \mathfrak{P}m_2 = \text{const.}$ folgt

$$\cos O\mathfrak{P}m_1 \,.\, \cos O\mathfrak{P}m_2 = \cos\mathfrak{P}c_2 \,.\, \cos\mathfrak{P}c_1 = \text{const.},$$

also ist die sphärische Ellipse der Ort der Spitze ($\mathfrak{P}$) eines sphärischen Dreiecks, dessen Basis ($c_1 c_2$) gegeben ist, und dessen Product der cosinus seiner Seiten constant ist.

Es ist auf voriger Seite nachgewiesen worden, dass, wenn eine sphärische Gerade die Curve in P und Q, die cyclischen Bogen in A und B schneidet, alsdann $AP = QB$ ist. Fallen P und Q zusammen, so wird die Sehne PQ zur Tangente und es ist daher der Berührungspunkt einer sphärischen Tangente unserer Curve der Halbirungspunkt ihrer zwischen den cyclischen Bogen gelegenen Strecke.

Das Integral. S. Fig. 13. Sind wieder wie oben die vom Austritt der ζ Axe Z gleich weit entfernten Brennpunkte F und F_1, u und v Radienvectoren von ihnen nach einem Punkte $\mathfrak{P}$ der sphärischen Ellipse, γ der Bogen $Z\mathfrak{P}$, so dass $\zeta = \cos\gamma$ ist, ψ der Winkel $FZ\mathfrak{P}$, so wird $\xi = \sin\gamma\cos\psi$ und $\eta = \sin\gamma\sin\psi$, ferner ist, wenn, wie oben gezeigt wurde, $u + v = 2\varepsilon$ ist,

$$\sin^2\tau = \sin^2\varepsilon\,(1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)$$
$$\cos^2\tau = \cos^2\varepsilon\,(1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon).$$

Es ist:

$$\cos u = \cos\gamma\cos\tau + \sin\gamma\sin\tau\cos\psi$$
$$\underline{\cos v = \cos\gamma\cos\tau - \sin\gamma\sin\tau\cos\psi}$$

$$\cos u + \cos v = 2\cos\gamma\cos\tau \text{ und}$$
$$\cos u - \cos v = 2\sin\gamma\cos\psi\sin\tau$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2},$$

setzt man ein $\dfrac{u+v}{2} = \varepsilon$ und ferner $\dfrac{u-v}{2} = \delta$, so folgt:

$$2\cos\varepsilon\cos\delta = 2\cos\gamma\cos\tau \qquad = 2\zeta\cos\tau$$
$$-2\sin\varepsilon\sin\delta = 2\sin\gamma\cos\psi\sin\tau = 2\xi\sin\tau$$

und hieraus:

$$\xi = \frac{-\sin\delta}{\dfrac{\sin\tau}{\sin\varepsilon}}$$

$$\zeta = \frac{\cos\delta}{\dfrac{\cos\tau}{\cos\varepsilon}}$$

$$\eta = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\delta}{1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon} - \frac{\cos^2\delta}{1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}}, \text{ also}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\cos 2\varepsilon\,(\sin^2\tau - \sin^2\delta)}{(1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)\,(1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)}}$$

$$\zeta = \frac{\cos\delta}{\sqrt{1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}}$$

$$\xi = \frac{-\sin\delta}{\sqrt{1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}}$$

$$\frac{d\xi}{d\delta} = \frac{-\cos\delta}{\sqrt{1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}}$$

$$\frac{d\eta}{d\delta} = \frac{-\sin\delta\cos\delta\sqrt{\cos 2\varepsilon}}{\sqrt{(1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)\,(1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)\,(\sin^2\tau - \sin^2\delta)}}$$

$$\frac{d\zeta}{d\delta} = \frac{-\sin\delta}{\sqrt{1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}}$$

$$\left(\frac{ds}{d\delta}\right)^2 = \left(\frac{d\xi}{d\delta}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\delta}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\delta}\right)^2.$$

Die Werthe eingesetzt ergiebt

$$\left(\frac{d s}{d \delta}\right)^2 = \frac{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \delta}{\sin^2 \varepsilon (1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon) - \sin^2 \delta} = \frac{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \delta}{\sin^2 \tau - \sin^2 \delta}.$$

Für den Endpunkt der kleinen Axe A sind u und v einander gleich, es ist mithin für diesen Punkt $\delta = 0$. Mit ihm soll die Rectification beginnen. Für den Endpunkt B dieser Quadranten der sphärischen Ellipse wird

$$u = F B = 2\tau + F_{,} B,$$
$$v = F_{,} B,$$
$$\frac{u - v}{2} = \delta = \tau.$$

Mithin wird der Umfang eines der beiden Curventheile sein

$$U = 4 \int_0^\tau \sqrt{\frac{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \delta}{\sin^2 \tau - \sin^2 \delta}}\, d\delta = 4 \int_0^\tau \frac{d\delta}{\sqrt{\frac{\sin^2 \tau - \sin^2 \delta}{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \delta}}}.$$

Da $\varepsilon > \tau$ und dieses grösser, höchstens gleich δ ist, so folgt, dass, wenn ich mit Θ einen echten Bruch bezeichne, ein Werth Θ existirt, so dass

$$\frac{\sin^2 \tau}{\sin^2 \varepsilon}\, \Theta = \frac{\sin^2 \tau - \sin^2 \delta}{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \delta},$$

wo $0 < \Theta < 1$ ist; oder

$$\frac{\sin^2 \varepsilon (1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon) - \sin^2 \delta}{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \delta} = (1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon)\, \Theta.$$

Variable φ. Diesen positiven ächten Bruch $\Theta = \sin^2 \varphi$ gesetzt und φ als neue Variable eingeführt, ergiebt

$$\frac{\sin^2 \tau}{\sin^2 \varepsilon} \sin^2 \varphi = \frac{\sin^2 \tau - \sin^2 \delta}{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \delta} = (1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon) \sin^2 \varphi$$

$$\sin^2 \delta = \frac{\sin^2 \tau \cos^2 \varphi}{1 - (1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon) \sin^2 \varphi} = \frac{\sin^2 \tau \cos^2 \varphi}{1 - \frac{\sin^2 \tau}{\sin^2 \varepsilon} \sin^2 \varphi}$$

$$\cos^2 \delta = \frac{\cos^2 \tau - \frac{\sin^2 \tau}{\sin^2 \varepsilon} \cos^2 \varepsilon \sin^2 \varphi}{1 - \frac{\sin^2 \tau}{\sin^2 \varepsilon} \sin^2 \varphi}$$

$$= \frac{\cos^2 \varepsilon \left[(1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon) - (1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon) \sin^2 \varphi\right]}{1 - (1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2 \varepsilon) \sin^2 \varphi}.$$

Für $\delta = 0$ wird $\sin^2 \varphi = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

„ $\delta = \pm \tau$ „ $\sin^2 \varphi = 0$, $\varphi = 0$,

hiernach bestimmen sich die neuen Grenzen.

Aus $\sin^2\delta = \sin^2\tau \dfrac{\cos^2\varphi}{1 - \dfrac{\sin^2\tau}{\sin^2\varepsilon}\sin^2\varphi}$ folgt

$$2\sin\delta\cos\delta\, d\delta =$$

$$\sin^2\tau \frac{-\left(1 - \dfrac{\sin^2\tau}{\sin^2\varepsilon}\sin^2\varphi\right) 2\cos\varphi\sin\varphi + \cos^2\varphi\, 2\dfrac{\sin^2\tau}{\sin^2\varepsilon}\sin\varphi\cos\varphi}{\left(1 - \dfrac{\sin^2\tau}{\sin^2\varepsilon}\sin^2\varphi\right)^2} d\varphi$$

oder

$$\sin\delta\cos\delta\, d\delta = \sin^2\tau \frac{-\left(1 - \dfrac{\sin^2\tau}{\sin^2\varepsilon}\right)\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{\left(1 - \dfrac{\sin^2\tau}{\sin^2\varepsilon}\sin^2\varphi\right)^2}$$

$$\sin\delta\cos\delta = \frac{\sin\tau\cos\varphi\cos\tau\sqrt{1 - \dfrac{\operatorname{tg}^2\tau}{\operatorname{tg}^2\varepsilon}\sin^2\varphi}}{\left(1 - \dfrac{\sin^2\tau}{\sin^2\varepsilon}\sin^2\varphi\right)},$$

also

$$d\delta = \frac{-\left(1 - \dfrac{\sin^2\tau}{\sin^2\varepsilon}\right)\sin\varphi\, d\varphi \,.\, \sin\tau}{\cos\tau\left(1 - \dfrac{\sin^2\tau}{\sin^2\varepsilon}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1 - \dfrac{\operatorname{tg}^2\tau}{\operatorname{tg}^2\varepsilon}\sin^2\varphi}}$$

$$\sqrt{\frac{\sin^2\varepsilon - \sin^2\delta}{\sin^2\tau - \sin^2\delta}} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\tau\sin\varphi},$$

also

$$ds = \sqrt{\frac{\sin^2\varepsilon - \sin^2\delta}{\sin^2\tau - \sin^2\delta}} = \frac{-\sin\varepsilon\left(1 - \dfrac{\sin^2\tau}{\sin^2\varepsilon}\right)d\varphi}{\cos\tau\left(1 - \dfrac{\sin^2\tau}{\sin^2\varepsilon}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1 - \dfrac{\operatorname{tg}^2\tau}{\operatorname{tg}^2\varepsilon}\sin^2\varphi}},$$

mithin

$$U = 4\frac{\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos 2\varepsilon}{\sqrt{1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\left(1 - \dfrac{\sin^2\tau}{\sin^2\varepsilon}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1 - \dfrac{\operatorname{tg}^2\tau}{\operatorname{tg}^2\varepsilon}\sin^2\varphi}}.$$

Bezeichnet man mit s die Strecke auf der Curve gemessen vom Punkte

$$\xi = \sin\varepsilon$$
$$\eta = 0$$
$$\zeta = \cos\varepsilon$$

bis zu einem beliebigen Punkte der Ellipse im ersten Quadranten, so wird, weil

$$\sin^2\delta = \frac{\xi^2 \sin^2\tau}{\sin^2\varepsilon}, \quad \sin^2\varphi = \frac{\sin^2\varepsilon}{\sin^2\tau}\,\frac{\sin^2\tau - \sin^2\delta}{\sin^2\varepsilon - \sin^2\delta}$$

$$s = \frac{\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos 2\varepsilon}{\sqrt{1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{\sin^2\tau}{\sin^2\varepsilon}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2\tau}{\operatorname{tg}^2\varepsilon}\sin^2\varphi}}$$

sich die zugehörige obere Grenze berechnen aus

$$\sin^2\varphi = \frac{\sin^2\varepsilon - \xi^2}{\sin^2\varepsilon - (1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)\,\xi^2}.$$

Dies ist ein elliptisches Integral in der Legendre'schen Normalform

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = \Pi_{,}(\varphi_{,}n),$$

$$\text{indem } n = -(1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon) \quad k^2 = \frac{1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}{1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon},$$

$$\text{also } +k^2 < -n < +1.$$

Um von der Legendre'schen Form auf die Jacobi'sche Transcendente Π zu gelangen, setze $n = -k^2\sin^2 am\,(ia + K)$, so erhält man

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = u + \frac{\Delta\, am\, a\, k'}{k'^2 \sin am\,(a, k')\cos am\,(a, k')} \cdot i\,\Pi(u, ia + K),$$

aus $n = -k^2\sin^2 am\,(ia + K)$ folgt

$$1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon = \frac{1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}{1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}\sin^2 am\,(ia + K)$$

$$1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon = \sin^2 am\,(ia + K) = \frac{1}{1 - k'^2 \sin am\,(a, k')}$$

$$k'^2 = 1 - k^2 = 1 - \frac{1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}{1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon} = \frac{\cos 2\varepsilon}{1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}$$

$$\sin^2 am\,(a, k') = \frac{1}{k'^2}\left(1 - \frac{1}{1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}\right) = \sin^2\varepsilon$$

$$\sin am\,(a, k') = \sin\varepsilon$$

$$a = \int_0^\varepsilon \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos 2\varepsilon}{1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}\sin^2\varphi}};$$

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}{1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}\sin^2\varphi}}$$

$$\Delta\, am(a,k') = \sqrt{1 - \frac{\cos 2\varepsilon}{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}\sin^2\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}}$$

$$k'^2 = \frac{\cos 2\varepsilon}{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}$$

$$\sin am(a,k') = \sin\varepsilon \qquad \cos am(a,k') = \cos\varepsilon$$

$$\frac{\Delta\, am(a,k')}{k'\sin am(a,k')\cos am(a,k')} = \frac{\sqrt{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}}{\sin\varepsilon\,.\,\cos\varepsilon\,.\,\cos 2\varepsilon}$$

$$i\,\Pi(u, ia+K) = u\left\{Z(a,k') + \frac{\pi a}{2KK'} - \frac{k'^2\sin am(a,k')\cos am(a,k')}{\Delta\, am(a,k')}\right\}$$

$$+ \frac{i}{2}\, ln\left\{\frac{\Theta(u-K-ia)}{\Theta(u+K+ia)}\right\}$$

$$\text{wo } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}\sin^2\varphi}},$$

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos 2\varepsilon}{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}\sin^2\varphi}}$$

eingesetzt

$$\int_0^{\varphi} = \frac{\sqrt{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}}{\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos 2\varepsilon}\cdot\left\{\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}\sin^2\varphi}}\left[z(a,k') + \frac{\pi a}{2KK'}\right]\right.$$

$$\left. + \frac{i}{2}\, ln\frac{\Theta(u-K-ia)}{\Theta(u+K+ia)}\right\}$$

und

$$s = \frac{\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos 2\varepsilon}{\sqrt{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}}\int_0^{\varphi}$$

$$s = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}\sin^2\varphi}}\left\{Z(a,k') + \frac{\pi a}{2KK'}\right\}$$

$$+ \frac{i}{2}\, ln\frac{\Theta(u-K-ia)}{\Theta(u+K+ia)},$$

also z. B. für $\varepsilon = 30^0$ gestaltet sich die Rechnung wie folgt:

1. Berechnung von q und q':

Setzt man $\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}$, so wird

$$q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + 1707\lambda^{17} + \dots$$

$$k' = \frac{2}{3}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{6}+2}{2(3-2)} = 2{,}5 - \sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 0{,}0505\;102\;572 \\ 2\lambda^5 &= 0{,}0000\;006\;575 \\ 15\lambda^9 &= 0{,}0000\;000\;000 \\ \hline q &= 0{,}0505\;109\;148, \end{aligned}$$

aus $\ln q \ln q_{,} = \pi$ berechnet sich

$$\begin{aligned} \ln q &= -2{,}9855\;6684\;11 \\ \ln q_{,} &= -3{,}3057\;7237\;97 \\ q_{,} &= 0{,}0366\;695\;573. \end{aligned}$$

2. Berechnung von

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\sin^2\varphi}} \qquad \left(a = \int_0^{\varepsilon} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}\right)$$

$$\Delta\, am(a,k') = \sqrt{1-k'^2\sin^2\varepsilon} = \sqrt{k}\;\frac{\Theta(a+K)}{\Theta a}, \text{ also}$$

$$\Delta\, am(a,k') = \sqrt{1-\tfrac{4}{9}\sin^2 30^0} = \sqrt[4]{\tfrac{5}{9}}.(\Theta(a+K):\Theta a)$$

$$\sqrt{\tfrac{8}{9}} = \sqrt[4]{\tfrac{5}{9}}\;\frac{\Theta(a+K)}{\Theta a}$$

$$\frac{\Theta(a+K)}{\Theta a} = \sqrt[4]{\tfrac{64}{45}} = \operatorname{ctg}\alpha$$

gesetzt, ergiebt da

$$\frac{\Theta(a+K)}{\Theta(a)} = \frac{1+2q'\cos\frac{\pi a}{K'} + 2q'^4\cos\frac{2\pi a}{K'} + 2q'^9\cos\frac{3\pi a}{K'} + \dots}{1-2q'\cos\frac{\pi a}{K'} + 2q'^4\cos\frac{2\pi a}{K'} - 2q'^9\cos\frac{3\pi a}{K'} + \dots}$$

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + 1} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

$$= \frac{2q'\cos\frac{\pi a}{K'} + 2q'^9\cos\frac{3\pi a}{K'} + 2q'^{25}\cos\frac{5a\pi}{K'} + \dots}{1+2q'^4\cos\frac{2\pi a}{K'} + 2q'^{16}\cos\frac{4\pi a}{K'} + \dots}.$$

Da q'^9 erst in der zwölften Decimalstelle von Null abweicht, so können alle Glieder von dieser und höherer Potenz vernachlässigt werden und man kann setzen:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{2\,q'\cos\frac{\pi a}{K'}}{1+2\,q'^4\cos 2\frac{\pi a}{K'}}=\frac{2\,q'\cos\frac{\pi a}{K'}}{1+q'^4\left(4\cos^2\frac{\pi a}{K'}-2\right)}$$

$$(1-2\,q'^4)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+4\,q'^4\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\frac{\pi a}{K'}-2\,q'\cos\frac{\pi a}{K'}=0$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt[4]{\tfrac{64}{45}},$$

$$\alpha=42^0\;28'\;50'',\;368$$
$$45^0-\alpha=\;\;2^0\;31'\;\;\;9'',\;632$$

eingesetzt und ausgerechnet

$$\log\cos\frac{\pi a}{K'}=0{,}7789961$$

$$\frac{\pi a}{K'}=53^0\,2'\,47'',\quad \frac{\pi a}{2\,K'}=\frac{a}{\Theta^2 K'}=\frac{a}{1+2\,q'+2\,q'^4+2q'^9+\ldots}$$

$$a=0{,}533314$$

$$\frac{\pi a}{2\,K'}=0{,}4629146$$

$$\frac{1}{4}Z(a,k')=\frac{\pi}{2\,K'}\cdot\frac{q'\sin\frac{a\pi}{K'}-2\,q'^4\sin 2\frac{a\pi}{K'}+3\,q'^9\sin 3\frac{a\pi}{K'}-\ldots}{1-2\,q'\cos\frac{\pi a}{K'}+2\,q'^4\cos 2\frac{\pi a}{K'}-2\,q'^9\cos 3\frac{a\pi}{K'}+\ldots}$$

von q'^9 (inclusive) an sind wieder alle Glieder zu vernachlässigen.

$$\log\frac{Z(a,k')}{4}=0{,}4150853-2.$$

Ebenso wie man oben a berechnete, kann man nun auch u berechnen, K wie oben K' etc., die Θ-Reihen ausführen, wobei sich i weghebt und so das ganze Integral.

Beispiel: Der Umfang ist zu berechnen für den Fall $\varepsilon=30^0$.

Aus u wird K und die Gleichung

$$s=u\left\{Z(a,k')+\frac{\pi a}{2\,K K'}\right\}+\frac{i}{2}\,l\,n\,\frac{\Theta\,(u-K-ia)}{\Theta\,(u+K+ia)}$$

zu

$$U=4\left\{K\,Z\,(a,k')+\frac{\pi a}{2\,K'}\right\}+\frac{i}{2}\,l\,n\,\frac{\Theta\,(-i\,a)}{\Theta\,(2\,K+i\,a)},$$

da aber $\Theta\,(-a\,i)=\Theta\,(a\,i)$ und $2\,K$ die Periode der Θ-Reihe, also auch $\Theta\,(a\,i+2\,K)=\Theta\,(i\,a)$ wird, so lautet der letzte Summand

$$\frac{i}{2}\,l\,n\,\frac{\Theta(i\,a)}{\Theta(i\,a)}=\frac{i}{2}\,l\,n\,1=0,$$

also wird das ganze Integral

$$U = 4\left\{K\,Z(a,k') + \frac{\pi a}{2K'}\right\},$$

wofür man auch setzen kann

$$4K\left\{E(a,k') - \frac{E'}{K'}\right\} + \frac{2\pi a}{K'},$$

doch dürfte die erste Form geeigneter zur Berechnung sein.

Die Berechnung liefert

$$U = 2{,}644027.$$

Der Winkel des abgewickelten Kegelmantels ist somit $151^0\,29'\,29'', 75$. Der Umfang der Polcurve ist doppelt so gross.

Zweite Entwickelung des Integrals.

Die Gleichungen

$$1)\quad \frac{\xi^2}{a^2-\varrho_1} + \frac{\eta^2}{b^2-\varrho_1} + \frac{\zeta^2}{c^2-\varrho_1} = 0,$$

$$2)\quad \frac{\xi^2}{a^2-\varrho_2} + \frac{\eta^2}{b^2-\varrho_2} + \frac{\zeta^2}{c^2-\varrho_2} = 0$$

sind für den Fall

4) $a^2 > \varrho_1 > b^2 > \varrho_2 > c^2$ die Gleichungen elliptischer Kegel, deren erster um die ξ-Axe, deren zweiter um die ζ-Axe liegt.

Tritt zu diesen Bedingungen noch die folgende

3) $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, und sind $\varrho_1\ \varrho_2$ variabel, so stellen diese Gleichungen zwei Schaaren sphärischer Curven dar, die man als elliptische Kugelcoordinaten bezeichnet.

Sollen die elliptischen Kugelcoordinaten eines Punktes gefunden werden, dessen rechtwinklige Coordinaten bekannt sind, so geschieht dies durch Auflösung der Gleichung zweiten Grades

$$5)\quad \frac{\xi^2}{a^2-\mu} + \frac{\eta^2}{b^2-\mu} + \frac{\zeta^2}{c^2-\mu} = 0.$$

Für den umgekehrten Fall folgt aus obigen Gleichungen

$$\begin{array}{llll}
\xi^2(b^2-\varrho_1)(c^2-\varrho_1) & + \eta^2(a^2-\varrho_1)(c^2-\varrho_1) & + \zeta^2(a^2-\varrho_1)(b^2-\varrho_1) & = 0 \\
\xi^2(b^2-\varrho_2)(c^2-\varrho_2) & + \eta^2(a^2-\varrho_2)(c^2-\varrho_2) & + \zeta^2(a^2-\varrho_2)(b^2-\varrho_2) & = 0 \\
\xi^2 & + \eta^2 & + \zeta^2 & = 1
\end{array}$$

$$\xi^2 = \frac{(a^2-\varrho_1)(a^2-\varrho_2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)};\quad \eta^2 = \frac{(b^2-\varrho_1)(b^2-\varrho_2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}$$

$$\zeta^2 = \frac{(c^2-\varrho_1)(c^2-\varrho_2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Soll nun die Bogenlänge einer sphärischen Ellipse um die ζ-Axe bestimmt werden, so folgt, dass in derselben $\varrho_2 = \text{const.}$ ist, also nur ϱ_1 variabel.

$$\left(\frac{ds}{d\varrho_1}\right)^2 = \left(\frac{d\xi}{d\varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\varrho_1}\right)^2$$

$$\xi^2 = \frac{(a^2 - \varrho_1)(a^2 - \varrho_2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \text{ etc. (s. vor. Seite), also}$$

$$2\,ln\,\xi = ln\,(a^2 - \varrho_1) + ln\,\frac{a^2 - \varrho_2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}$$

$$2\,ln\,\eta = ln\,(\varrho_1 - b^2) + ln\,\frac{b^2 - \varrho_2}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}$$

$$2\,ln\,\zeta = ln\,(\varrho_1 - c^2) + ln\,\frac{\varrho_2 - c^2}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)},$$

folglich

$$\frac{2}{\xi}\frac{d\xi}{d\varrho_1} = \frac{-1}{a^2 - \varrho_1}; \quad \left(\frac{d\xi}{d\varrho_1}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{\xi^2}{(a^2 - \varrho_1)^2}$$

$$\frac{2}{\eta}\frac{d\eta}{d\varrho_1} = \frac{-1}{b^2 - \varrho_1}; \quad \left(\frac{d\eta}{d\varrho_1}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{\eta^2}{(b^2 - \varrho_1)^2}$$

$$\frac{2}{\zeta}\frac{d\zeta}{d\varrho_1} = \frac{-1}{c^2 - \varrho_1}; \quad \left(\frac{d\zeta}{d\varrho_1}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{\zeta^2}{(c^2 - \varrho_1)^2}$$

$$\left(\frac{ds}{d\varrho_1}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\xi^2}{(a^2 - \varrho_1)^2} + \frac{\eta^2}{(b^2 - \varrho_1)^2} + \frac{\zeta^2}{(c^2 - \varrho_1)^2}\right).$$

Es ist nun

$$\frac{\xi^2}{a^2 - \mu} + \frac{\eta^2}{b^2 - \mu} + \frac{\zeta^2}{c^2 - \mu} = \frac{(\mu - \varrho_1)(\mu - \varrho_2)}{(a^2 - \mu)(b^2 - \mu)(c^2 - \mu)}$$

eine identische Gleichung, denn beide Seiten derselben haben gleiche Nenner und die Zähler sind Functionen vom zweiten Grade, welche beide für $\mu = \varrho_1$ und $\mu = \varrho_2$ zu Null werden. Bezeichnen wir die rechte Seite durch $\frac{\psi(\mu)}{\varphi(\mu)}$ und differenziren die Gleichung nach μ, so folgt

$$\frac{\xi^2}{(a^2 - \mu)^2} + \frac{\eta^2}{(b^2 - \mu)^2} + \frac{\zeta^2}{(c^2 - \mu)^2} = \frac{\psi'(\mu)}{\varphi(\mu)} - \frac{\psi(\mu)\,\varphi'(\mu)}{(\varphi(\mu))^2}.$$

Setzen wir hierin $\mu = \varrho_1$, so folgt

$$\frac{\xi^2}{(a^2 - \varrho_1)^2} + \frac{\eta^2}{(b^2 - \varrho_1)^2} + \frac{\zeta^2}{(c^2 - \varrho_1)^2} = \frac{\psi'(\varrho_1)}{\varphi(\varrho_1)},$$

da, wie oben gezeigt, $\psi(\varrho_1) = 0$ wird.

Die rechte Seite der Gleichung ist $= \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{(a^2 - \varrho_1)(b^2 - \varrho_1)(c^2 - \varrho_1)}$, also

$$\left(\frac{ds}{d\varrho_1}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{(a^2 - \varrho_1)(b^2 - \varrho_1)(c^2 - \varrho_1)}$$

oder

$$s = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{\varrho_1 - \varrho_2}\, d\varrho_1}{\sqrt{(a^2 - \varrho_1)(b^2 - \varrho_1)(c^2 - \varrho_1)}}$$

und

$$U = \int_{b^2}^{a^2} \frac{\sqrt{\varrho_1 - \varrho_2}\, d\varrho_1}{\sqrt{(a^2 - \varrho_1)(b^2 - \varrho_1)(c^2 - \varrho_1)}}.$$

Lautet nun die Gleichung der zu berechnenden Ellipse ($\varepsilon = 30^0$ als Beispiel)

$$\xi^2 + \frac{\eta^2}{\frac{3}{8}} - \frac{\zeta^2}{3} = 0,$$

so wird

$$a^2 - \varrho_2 = 1, \quad b^2 - \varrho_2 = \tfrac{3}{8}, \quad c^2 - \varrho_2 = -3$$
$$a^2 - c_2 = 4, \quad a^2 - b^2 = \tfrac{5}{8}, \quad b^2 - c^2 = \tfrac{27}{8},$$

also z. B. für

$$c^2 = 1, \quad a^2 = 5, \quad b^2 = \tfrac{35}{8}, \quad \varrho_2 = 4$$

$$U = 2 \int_{\frac{35}{8}}^{\frac{40}{8}} \frac{(\varrho_1 - 4)\, d\varrho_1}{\sqrt{-1(\varrho_1 - 5)(\varrho_1 - \frac{35}{8})(\varrho_1 - 4)(\varrho_1 - 1)}}$$

$$\left[\text{für } c^2 = 0: \; U = 2 \int_0^1 \frac{(\varrho_1 - \frac{3}{4})\, d\varrho_1}{\sqrt{-1(\varrho_1 - \frac{3}{4})(\varrho_1 - 1)(\varrho_1 - \frac{27}{32})(\varrho_1 - 0)}}\right].$$

Setze $\varrho_1 = \dfrac{135 + 5z^2}{27 + 5z^2}$, so folgt

$$d\varrho_1 = \frac{(27 + 5z^2)5 - (135 + 5z^2)5}{(27 + 5z^2)^2} 2z\, dz = \frac{-540 \,.\, 2 \,.\, z \,.\, dz}{(27 + 5z^2)^2}$$

$$\varrho_1 - 4 = \frac{135 + 5z^2 - 4 \,.\, 27 - 20z^2}{27 + 5z^2} = \frac{3(9 - 5z^2)}{27 - 5z^2}$$

$$\varrho_1 - 5 = \frac{-20z^2}{27 + 5z^2}$$

$$\varrho_1 - \tfrac{35}{8} = \frac{5 \,.\, 27(1 - z^2)}{8(27 + 5z^2)}$$

$$\varrho_1 - 1 = \frac{108}{27 + 5z^2}$$

für $\varrho_1 = \frac{40}{8}$ wird $z = 0$,
„ $\varrho_1 = \frac{35}{8}$ „ $z = 1$ eingesetzt

$$\frac{U}{2} = -540 \,.\, 2 \,.\, 3 \int_1^0 \frac{(9 - 5z^2) z\, dz}{(27 + 5z^2)\sqrt{20z^2 \,.\, \frac{5 \,.\, 27}{8}(1 - z^2)\, 3(9 - 5z^2) \,.\, 108}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}} \int_0^1 \frac{(1 - \frac{5}{9}z^2)\, dz}{(1 + \frac{5}{27}z^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - \frac{5}{9}z^2)}}$$

$$\frac{-\frac{5}{9}z^2+1}{\frac{5}{27}z^2+1}=-3+\frac{4}{(1+\frac{5}{27}z^2)}$$

$$\frac{U}{2}=\frac{4}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\left\{-3\int\limits_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\frac{5}{9}z^2)}}\right.$$

$$\left.+4\int\limits_0^1\frac{dz}{(1+\frac{5}{27}z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-\frac{5}{9}z^2)}}\right\}.$$

Das erste der Integrale ist $=K=1{,}90424$, $(k^2=\frac{5}{9})$, das zweite wird berechnet, indem man substituirt $n=-\frac{5}{9}\sin^2 am\,(ia)$ und wird alsdann

$$=K+\frac{\sin am\,(a,k')\cos am\,(a,k')}{\varDelta\,am\,(a,k')}\cdot i\,\Pi\,(K,ia)$$

$$i\,\Pi(K,ia)=K\left(Z(a,k')+\frac{\pi a}{2KK'}-\operatorname{tg} am(a,k')\,\varDelta\,am\,(a,k')\right)$$

$$+\frac{i}{2}\,ln\,\frac{\Theta(K-ia)}{\Theta(K+ia)}.$$

Weil $ia+K=(ia-K)+2K$ und $2K$ Periode der Θ-Reiher ist, wird der letzte Summand Null

$$n=\frac{5}{27}=-\frac{5}{9}\sin^2 am\,(ia)$$

$$\sin^2 am\,(ia)=-\tfrac{1}{3}=-\operatorname{tg}^2 am\,(a,k')$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}}=\operatorname{tg} am\,(a,k')$$

$$\sin am\,(a,k')=\tfrac{1}{2},\ \cos am\,(a,k')=\sqrt{\tfrac{3}{4}},$$

$$\varDelta\,am\,(a,k')=\sqrt{\tfrac{8}{9}}\ (am(a,k')=\varepsilon=30^0),$$

folglich

$$U=\tfrac{8}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\left\{K+\frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{8}{9}}}\left(KZ(a,k')-\frac{\pi a}{2K'}\right)-4\cdot\tfrac{1}{4}K\right\}$$

$$U=4\left(KZ(a,k')-\frac{\pi a}{2K'}\right)\ \text{wie oben.}$$

Dritte Entwickelung des Integrals.

$$\frac{\xi_,^2}{\operatorname{tg}^2\varepsilon}+\frac{\eta_,^2}{\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}=1\quad\left[\xi_,=\frac{\xi}{\zeta},\quad \eta_,=\frac{\eta}{\zeta}\ \text{des gewöhnlichen Ausdruckes}\right]$$

$\xi_,=\operatorname{tg}\varepsilon\sin\varphi$ gesetzt, giebt

$$\eta_,=\sin\varepsilon\sqrt{\cos 2\varepsilon}\cos\varphi$$

$$d\xi_,=\operatorname{tg}\varepsilon\cos\varphi\,d\varphi$$

$$d\eta_,=-\sin\varepsilon\sqrt{\cos 2\varepsilon}\sin\varphi\,d\varphi$$

$$\eta_, d\xi_,-\xi_, d\eta_,=\sin\varepsilon\operatorname{tg}\varepsilon\sqrt{\cos 2\varepsilon}\,d\varphi$$

$$ds^2 = \frac{d\xi_,^2 + d\eta_,^2 + (\eta_, d\xi_, - \xi_, d\eta_,)^2}{(1 + \xi_,^2 + \eta_,^2)^2}$$

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 \varepsilon \cos^2 \varphi + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon \sin^2 \varphi + \sin^2 \varepsilon \operatorname{tg}^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}{(1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon \sin^2 \varphi + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon \cos^2 \varphi)^2}$$

$$ds = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon (1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon) - (\operatorname{tg}^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon) \sin^2 \varphi}}{1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon + (\operatorname{tg}^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon) \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$$\sin^2 \varepsilon (1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon) = \sin^2 \tau$$

$$\cos^2 \varepsilon (1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon) = \cos^2 \tau \quad \text{gesetzt}$$

$$ds = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \tau} \frac{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \tau}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} \sin^2 \varphi}}{1 + \operatorname{tg}^2 \tau \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$$s = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \tau} \int \frac{\left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \tau}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} \sin^2 \varphi\right) d\varphi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \tau \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \tau}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} \sin^2 \varphi}} \quad \text{für } \varepsilon = 30^0$$

$$U = \frac{8}{3} \sqrt{\tfrac{2}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \frac{5}{9} \sin^2 \varphi)\, d\varphi}{(1 + \frac{5}{27} \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \frac{5}{9} \sin^2 \varphi}},$$

die weitere Entwickelung geschieht wie in der zweiten Berechnung des Integrals.

Der Reciprokalkegel. Die Tangentialebene des Kegels im Punkte $\mathfrak{P}$ der Polbahn schneidet die Kugel in einem grössten Kreise, dessen sphärischer Mittelpunkt erhalten wird, wenn man durch den Kugelmittelpunkt eine Parallele zur Normalen desjenigen Kegelschnitts legt, den die Tangentialebene der Kugel in $\mathfrak{P}$ mit dem Kegel bildet.

Die Gleichung der Tangente im Punkte $\xi_, \eta_, \zeta_,$ der Polbahn ist

$$\frac{\xi \xi_,}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} + \frac{\eta \eta_,}{\sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon} - \zeta \zeta_, = 0,$$

die Winkel also, welche eine Senkrechte auf dieser Ebene mit den Axen bildet, sind

$$\cos \alpha = \frac{\xi_, \cos^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}{\sqrt{\xi_,^2 \cos^4 \varepsilon \cos^2 2\varepsilon + \eta_,^2 + \zeta_,^2 \sin^4 \varepsilon \cos^2 2\varepsilon}}$$

$$\cos \beta = \frac{\eta_,}{\sqrt{\xi_,^2 \cos^4 \varepsilon \cos^2 2\varepsilon + \eta_,^2 + \zeta_,^2 \sin^4 \varepsilon \cos^2 2\varepsilon}}$$

$$\cos \gamma = \frac{\zeta_, \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}{\sqrt{\xi_,^2 \cos^4 \varepsilon \cos^2 2\varepsilon + \eta_,^2 + \zeta_,^2 \sin^4 \varepsilon \cos^2 2\varepsilon}}.$$

Die Coordinaten des Punktes, in dem diese Senkrechte die Kugel schneidet, sind $\xi = \cos\alpha$, $\eta = \cos\beta$, $\zeta = \cos\gamma$, es folgt

$$\frac{\xi_{,}}{\eta_{,}}\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon = \frac{\xi}{\eta}$$

$$\frac{\zeta_{,}}{\eta_{,}}\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon = \frac{\zeta}{\eta}$$

und weil $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$ Punkte des Kegels sind, ist

$$\frac{\xi_{,}^2}{\eta_{,}^2}\operatorname{ctg}^2\varepsilon + \frac{1}{\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon} - \frac{\zeta_{,}^2}{\eta_{,}^2} = 0.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$, so erhält man den Ort der Mittelpunkte aller sphärischen Tangenten, die sphärische Reciprokalellipse:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\xi^2}{\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon} + \eta^2 - \dfrac{\zeta^2}{\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon} = 0\\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\end{array}\right\}.$$

Den Kegel kann man schreiben:

1) $\xi^2\sin^2\varepsilon + \eta^2\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon - \zeta^2\cos^2\varepsilon = 0$

und die Kugel

2) $\xi^2\sin^2\varepsilon + \eta^2\sin^2\varepsilon + \zeta^2\sin^2\varepsilon = \sin^2\varepsilon$

oder

3) $\xi^2\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon + \eta^2\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon + \zeta^2\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon$
$= \sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon$

oder

4) $\xi^2\cos^2\varepsilon + \eta^2\cos^2\varepsilon + \zeta^2\cos^2\varepsilon = \cos^2\varepsilon$

von Gleichung 2) Gleichung 1) subtrahirt, giebt

$$\eta^2\sin^2\varepsilon(1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon) + \zeta^2 = \sin^2\varepsilon$$

oder

$$\frac{\zeta^2}{\sin^2\varepsilon} + \frac{\eta^2}{\dfrac{1}{1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}} = 1,$$

Gleichung einer Ellipse, η-Axe die grössere, als Projection auf die $\eta\zeta$-Ebene.

Von Gleichung 1) Gleichung 3) subtrahirt, giebt die Projection auf die $\xi\zeta$-Ebene:

$$\xi^2\sin^2\varepsilon(1 - \cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon) - \zeta^2\cos^2\varepsilon(1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon) = -\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

Gleichung einer Hyperbel, deren reelle Axe ζ ist.

Addirt man 1) und 4), so ergiebt sich

$$\xi^2 + \eta^2\cos^2\varepsilon(1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon) = \cos^2\varepsilon$$

$$\frac{\xi^2}{\cos^2\varepsilon} + \frac{\eta^2}{\dfrac{1}{1 + \sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}} = 1,$$

Gleichung einer Ellipse, ξ-Axe die grössere.

Die Gleichung der im Brennpunkte F der Hauptellipse

$$\frac{\xi^2}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} + \frac{\eta^2}{\sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon} - \zeta^2 = 1$$

die Kugel tangirenden Ebene ist

$$\xi \sin \tau \pm \zeta \cos \tau = 1.$$

Untersucht man den Durchschnitt dieser Ebene mit dem Reciprokalkegel, so wird man die Form der Schnittcurve am besten erkennen, wenn man ein neues Coordinatensystem einführt, und zwar soll der Schnittpunkt der ξ-Axe mit der Schnittebene der Anfangspunkt desselben, die gemeinschaftliche Gerade dieser Ebene und der $\xi\eta$-Ebene seine x-Axe sein, so ergeben sich die Transformationsformeln

$$\xi = \frac{1 - y \sin \tau \cos \tau}{\sin \tau}; \quad \eta = x; \quad \zeta = y \sin \tau$$

und eingesetzt folgt

$$(x^2 + y^2) \sin^2 \tau \cos^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon - 2y \sin \tau \cos \tau + 1 = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises, also schneiden diejenigen Ebenen, welche auf den Focallinien eines Kegels senkrecht stehen, dessen Reciprokalkegel in Kreisen, sind also den cyclischen Bogen der Reciprokalkegel parallel, und weil der Reciprokalkegel eines Reciprokalkegels der ursprüngliche Kegel ist, gilt diese Eigenschaft auch umgekehrt. Die Brennpunkte des Reciprokalkegels liegen auf der $\zeta\eta$-Ebene im Abstand $\tau_{,}$ von der ζ-Axe, so dass

$$\sin \tau_{,} = \sqrt{\frac{\cos 2\varepsilon}{1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}}$$

$$\cos \tau_{,} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varepsilon \cos^2 \varepsilon}{1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon}} \text{ wird.}$$

Die Gleichung der Tangente der Curve

$$\begin{cases} \dfrac{\xi^2}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} + \dfrac{\eta^2}{\sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon} - \zeta^2 = 0 \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \end{cases}$$

im Punkte $\xi_{,} \eta_{,} \zeta_{,}$ war

$$\begin{cases} 1) \ \dfrac{\xi \xi_{,}}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} + \dfrac{\eta \eta_{,}}{\sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon} - \zeta \zeta_{,} = 0 \\ 2) \ \xi \xi_{,} + \eta \eta_{,} + \zeta \zeta_{,} = 1. \end{cases}$$

Setzt man in der letzten Gleichung statt Gleichung 2) ein

$$\xi \xi_{,} + \eta \eta_{,} + \zeta \zeta_{,} = 0,$$

so erhält man eine Parallele der Tangente, die also dieselben Winkel mit den Axen wie diese selbst bildet; sind die Winkel α, β, γ, so bestimmen sich diese aus:

$$\cos \alpha = \frac{-(1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon)\, \zeta_{,} \eta_{,}}{\sqrt{(1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon)^2 \eta_{,}^2 \zeta_{,}^2 + \cos^2 2\varepsilon\, \xi^2 \zeta^2 + (1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon)\, \xi^2 \eta^2}}.$$

Die Zähler von $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$ sind $\frac{\cos 2\varepsilon\, \xi_, \zeta_,}{(1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)\,\xi_,\eta_,}$ bei gleichem Nenner.

Die Normalebene jeder sphärischen Curve geht durch den Mittelpunkt, es ist also ihre Gleichung von der Form $\xi\cos\alpha+\eta\cos\beta+\zeta\cos\gamma=0$, wo α, β, γ die Winkel der Tangente sind.

Es folgt die

Gleichung der Normalebene im Punkte $\xi_,\zeta_,\eta_,$ der Curve

$$-(1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)\,\zeta_,\eta_,\xi+\cos 2\varepsilon\,\xi_,\zeta_,\eta+(1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)\,\xi_,\eta_,\zeta=0.$$

Setzt man wie oben geschehen ein

$$\xi_,=\frac{\sin\varepsilon\sin\delta}{\sin\tau},$$

$$\eta_,=\frac{\sqrt{(\sin^2\varepsilon-\sin^2\tau)(\sin^2\tau-\sin^2\delta)}}{\sin\tau\cos\tau},$$

$$\zeta_,=\frac{\cos\varepsilon\cos\delta}{\cos\tau},$$

so wird die

Gleichung der Normalebene für den Werth δ

$$\sqrt{(1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)(\sin^2\tau-\sin^2\delta)}\cos\delta\,\xi$$
$$-\sqrt{\cos 2\varepsilon}\sin\delta\cos\delta\,\eta-\sqrt{(1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)(\sin^2\tau-\sin^2\delta)}\sin\delta\,\zeta=0.$$

Für $\eta_,=0$ oder $\delta=\tau$ wird mithin die Normalebene zu $\eta=0$, zur $\xi\zeta$-Ebene und für $\delta=0$, $\xi_,=0$, zu $\xi=0$, d. i. zur $\eta\zeta$-Ebene.

Die Gleichung der Schmiegungsebene im Punkte $\xi_,\eta_,\zeta_,$ oder δ wird

$$(3-2\sin^2\varepsilon)\,\xi_,^3\,\xi-\frac{(3-2\sin^2\varepsilon)(3-2\cos^2\varepsilon)}{\cos^2 2\varepsilon}\,\eta_,^3\,\eta$$
$$+(3-2\cos^2\varepsilon)\,\zeta_,^3\,\zeta=1$$

oder

$$\cos\varepsilon\cos\tau\sin^3\delta\,\xi-\sqrt{\frac{(\sin^2\tau-\sin^2\delta)^3}{\cos 2\varepsilon}}\,\eta$$
$$+\sin\varepsilon\sin\tau\cos^3\delta\,\zeta=\sin\tau\cos\tau\sin\varepsilon\cos\varepsilon.$$

Für den Endpunkt der grossen Axe $\eta=0$, $\delta=\tau$ wird die Gleichung der Schmiegungsebene

$$\xi\frac{\sin^2\tau}{\sin\varepsilon}+\zeta\frac{\cos^2\tau}{\cos\varepsilon}=1,$$

d. h. die Schmiegungsebene ist parallel der η-Axe, ebenso zeigt sich, dass für die Endpunkte der kleinen Axe sie parallel der ξ-Axe wird.

Die Schmiegungsebene und die Normalebene schneiden sich in der Hauptnormalen, deren Gleichung ist mithin in $\xi_,\eta_,\zeta_,$:

$$\begin{cases}\xi_,^3(3-2\sin^2\varepsilon)\,\xi-\eta_,^3\dfrac{3+4\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon}{\cos^2 2\varepsilon}\,\eta+\zeta^3(3-2\cos^2\varepsilon)\,\zeta=1\\ \dfrac{\xi}{\xi_,}(1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)-\dfrac{\eta}{\eta_,}\cos 2\varepsilon-\dfrac{\zeta}{\zeta_,}(1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)=0\end{cases}$$

$$\text{wo}\quad\frac{\xi_,^2}{\operatorname{tg}^2\varepsilon}+\frac{\eta_,^2}{\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}-\zeta_,^2=0$$
$$\xi_,^2+\eta_,^2+\zeta_,^2=1$$

oder

$$\begin{cases} \sqrt{(1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)(\sin^2\varepsilon-\sin^2\delta)}\cos\delta\,\xi-\sqrt{\cos 2\varepsilon}\sin\delta\cos\delta\,\eta \\ -\sqrt{(1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)(\sin^2\varepsilon-\sin^2\delta)}\sin\delta\,\zeta=0 \\ \dfrac{\sin^3\delta\,\xi}{\sin\varepsilon\sin\tau}-\dfrac{(\sin^2\tau-\sin^2\delta)^{\frac{3}{2}}\,\eta}{\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\tau\cos\tau\sqrt{\cos 2\varepsilon}}+\dfrac{\cos^3\delta\,\zeta}{\cos\tau\cos\varepsilon}=1 \end{cases}$$

oder endlich auch

$$\frac{\sqrt{1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}\sqrt{\sin^2\tau-\sin^2\delta}\cos\delta(\xi_{,}-\xi)}{\cos^2\varepsilon\cos^2\tau-2\cos^2\varepsilon\cos^2\delta+\cos^4\delta}=$$

$$\frac{\sqrt{(1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)(1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)}\sin\delta\cos\delta(\eta_{,}-\eta)}{\sqrt{\cos 2\varepsilon}(\sin^2\varepsilon-2\sin^2\varepsilon\sin^2\delta+\sin^4\delta)}=$$

$$\frac{\sqrt{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}\sqrt{\sin^2\tau-\sin^2\delta}\sin\delta(\zeta_{,}-\zeta)}{\sin^2\varepsilon\sin^2\tau-2\sin^2\varepsilon\sin^2\delta+\sin^4\delta}$$

wo für $\xi_{,}\,\eta_{,}\,\zeta_{,}$ noch die Werthe in δ einzusetzen sind.

Die Winkel, welche die Hauptnormale mit den Axen macht, sind $\lambda\,\mu\,\nu$, wo

$$\cos\lambda=\frac{\sqrt{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}(\cos^4\delta-2\cos^2\varepsilon\cos^2\delta+\cos^2\varepsilon\cos^2\tau)\sin\delta}{\sqrt{[(\sin^2\delta-\sin^2\varepsilon)^4-\sin^4\varepsilon\cos^4\varepsilon\cos 2\varepsilon(\sin^2\delta-\sin^2\varepsilon)](1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)}}$$

$\cos\mu$ und $\cos\nu$ entsprechend.

Die Gleichung der rectificirenden Ebene ist

$$\xi\sin\delta(\cos^2\varepsilon\cos^2\tau-2\cos^2\varepsilon\cos^2\delta+\cos^4\delta)\sqrt{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}$$
$$+\eta\sqrt{\cos 2\varepsilon(\sin^2\tau-\sin^2\delta)}(\sin^2\varepsilon-2\sin^2\varepsilon\sin^2\delta+\sin^4\delta)$$
$$+\zeta\sqrt{1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}(\sin^2\varepsilon\sin^2\tau-2\sin^2\varepsilon\sin^2\delta+\sin^4\delta)=$$
$$\sqrt{(1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)(1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)}(\sin^4\varepsilon-\sin^2\varepsilon\sin^2\delta(1-\sin^4\varepsilon)+\sin^4\delta).$$

Die Binormale im Punkte $\xi_{,}\eta_{,}\zeta_{,}(\delta)$ ist der Schnitt der rectificirenden Ebene und der Normalebene. Die Winkel, welche sie mit den Axen bildet, sind

$$\cos(\xi,B)=\frac{-\cos^2\varepsilon\sqrt{\cos 2\varepsilon}\sin^3\delta}{\sqrt{(1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)\{\sin^4\varepsilon\cos^4\varepsilon\cos 2\varepsilon+(\sin^2\varepsilon-\sin^2\delta)^3\}}}$$

$$\cos(\eta,B)=\frac{\sqrt{(\sin^2\tau-\sin^2\delta)^3}}{\sqrt{(1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)(1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)\{\sin^4\varepsilon\cos^4\varepsilon\cos 2\varepsilon+(\sin^2\varepsilon-\sin^2\delta)^3\}}}$$

$$\cos(\zeta,B)=\frac{-\sin^2\varepsilon\sqrt{\cos 2\varepsilon}\cos^3\delta}{\sqrt{(1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)\{\sin^4\varepsilon\cos^4\varepsilon\cos 2\varepsilon+(\sin^2\varepsilon-\sin^2\delta)^3\}}}.$$

Den Winkel (ζ,B), den die Binormale mit der ζ-Axe bildet, bilden auch die $\xi\eta$-Ebene und die Schmiegungsebene. Wird für irgend einen Punkt δ

dieser Winkel ein Maximum oder ein Minimum, so wird in diesem Punkte die Curve eine Rückkehrebene der Curve als Schmiegungsebene haben

$$\cos(\zeta, B) = \frac{-\sin^2\varepsilon\sqrt{\cos 2\varepsilon}}{\sqrt{1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}} \frac{\cos^3\delta}{\sqrt{\sin^4\varepsilon\cos^4\varepsilon\cos 2\varepsilon + (\sin^2\varepsilon - \sin^2\delta)^3}}$$

$\dfrac{d\cos(\zeta, B)}{d\delta}$ gebildet und gleich Null gesetzt, liefert

$$((\sin^2\varepsilon - \sin^2\delta)^2 - \sin^4\varepsilon\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)\cos^2\delta\sin\delta = 0.$$

1) $\cos^2\delta = 0$, $\delta = \dfrac{\pi}{2}$ kommt, weil $\delta < \tau < \varepsilon < \dfrac{\pi}{4}$ ist, nicht vor.

2) $\sin\delta = 0$, $\delta = 0$. Der Winkel wird ein Maximum.

3) ergiebt sich $\sin^2\delta = \sin^2\varepsilon\left(1 - \sqrt{\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}\right)$ als ein Minimalwerth von (ζ, B). Die Tangentenfläche hat also in jenem Punkte einen Wendestrahl, die Schmiegungsebene schneidet diese Fläche in der Tangente, diese Fläche und mit ihr die Curve tritt von der einen Seite der Schmiegungsebene auf die andere über, insofern kann man diesen Punkt also als einen Wendepunkt bezeichnen.

Der Contingenzwinkel ist

$$d\tau = \frac{d\delta}{\sin^2\varepsilon - \sin^2\delta}\sqrt{\frac{\sin^4\varepsilon\cos^4\varepsilon\cos 2\varepsilon + (\sin^2\varepsilon - \sin^2\delta)^3}{\sin^2\tau - \sin^2\delta}},$$

woraus sich der Krümmungsradius der Curve ergiebt als

$$\varrho_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{(\sin^2\varepsilon - \sin^2\delta)^3}{\sin^4\varepsilon\cos^4\varepsilon\cos 2\varepsilon + (\sin^2\varepsilon - \sin^2\delta)^3}}$$

und

die Krümmung der Curve

$$\sqrt{1 + \frac{\sin^4\varepsilon\cos^4\varepsilon\cos 2\varepsilon}{(\sin^2\varepsilon - \sin^2\delta)^3}}.$$

Berechnet man den Schnitt der Schmiegungsebene und der Kugel, so erhält man einen Kreis vom Radius ϱ_{I}. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Krümmungsmittelpunkt der Curve. Die Krümmungsaxe einer sphärischen Curve geht durch den Kugelmittelpunkt.

Aus dem Meusnier'schen Satze ergiebt sich das Folgende: Legt man in einem Punkte der Curve eine Tangentialebene an die Kugel und ist der Krümmungsradius der Schnittfigur (Ellipse) dieser Ebene mit dem Kegel im Punkte P gleich r, α der Winkel, dessen sinus gleich ϱ_{I} ist, so ist $\varrho_{\mathrm{I}} = r\cos\alpha$

oder $r = \operatorname{tg}\alpha$, also $r = \dfrac{\varrho_{\mathrm{I}}}{\sqrt{1-\varrho_{\mathrm{I}}^2}}$,

$$\text{mithin } r = \sqrt{\frac{(\sin^2\varepsilon - \sin^2\delta)^3}{\sin^4\varepsilon\cos^4\varepsilon\cos 2\varepsilon}}.$$

Senkrecht auf der Schmiegungsebene steht die Krümmungsaxe, aber auch die Binormale. Die Gleichung der Krümmungsaxe ist mithin

$$\text{I.}\quad \frac{\xi}{\sin^3\delta\,.\,\cos^2\varepsilon\sqrt{\cos 2\varepsilon(1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)}} = \frac{-\eta}{\sqrt{(\sin^2\tau-\sin^2\delta)^3}} = \frac{\zeta}{\cos^3\delta\sin^2\varepsilon\sqrt{\cos 2\varepsilon(1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)}}$$

und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind drei Brüche, deren Zähler die Nenner dieser letzten Gleichungen sind, deren gemeinschaftlicher Nenner aber

$$\frac{1+\cos^2\varepsilon\cos^2\tau\cos 2\varepsilon\sin^6\delta+\sin^2\varepsilon\sin^2\tau\cos 2\varepsilon\cos^6\delta}{\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\tau\cos\tau\cos 2\varepsilon}\ \text{ist.}$$

Wollte man aus diesen drei Gleichungen die Grösse δ eliminiren, so würde man zwei Gleichungen erhalten, welche die Curve der Krümmungsmittelpunkte darstellen.

Zur Berechnung der

Fläche der Krümmungsaxen

ist aus der Formel I. (s. oben) δ zu eliminiren.

Setzt man $\cos^2\varepsilon\sqrt{\cos 2\varepsilon(1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)} = a$, so folgt

$$\left(\frac{\sin^2\tau-\sin^2\delta}{\sin^2\delta}\right)^3 = \frac{\eta^2 a^2}{\xi^2}$$

$$\sin^2\delta = \frac{\sin^2\tau}{1+\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}}}{\xi^{\frac{2}{3}}}}$$

und endlich die Gleichung der Fläche der Krümmungsaxen

$$(\zeta^2\sin^4\tau\cos^2\varepsilon-\eta^2\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon-\xi^2\cos^4\tau\sin^2\varepsilon)^3$$
$$=27\sin^4\varepsilon\sin^4\tau\cos^4\varepsilon\cos^4\tau\cos 2\varepsilon\,\xi^2\eta^2\zeta^2.$$

Zwei benachbarte Schmiegungsebenen bilden miteinander den Winkel

$$d\vartheta = \sqrt{\left(\frac{d\cos(\xi,B)}{d\delta}\right)^2+\left(\frac{d\cos(\eta,B)}{d\delta}\right)^2+\left(\frac{d\cos(\zeta,B)}{d\delta}\right)^2}\,d\delta,$$

wo (ξ, B), (η, B), (ζ, B) die Winkel bezeichnet, welche die Binormale mit den Axen einschliesst.

Bezeichnet man nun

$$\cos(\xi,B)=\frac{a v}{w},\quad \cos(\eta,B)=\frac{u}{w},\quad \cos(\zeta,B)=\frac{c x}{w},$$

$$\text{wo } a = -\cos^2\varepsilon\sqrt{\cos 2\varepsilon(1+\sin^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)}$$
$$c = -\sin^2\varepsilon\sqrt{\cos 2\varepsilon(1-\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon)}$$

$$v = \sin^3 \delta$$
$$u = (\sin^2 \tau - \sin^2 \delta)^{\frac{3}{2}}$$
$$x = \cos^3 \delta$$
$$w = \sqrt{(1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon)(1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon)\left\{\sin^4 \varepsilon \cos^4 \varepsilon \cos 2\varepsilon + (\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \delta)^3\right\}}$$

bedeutet, so folgt die Wurzel ins Quadrat

$$\left(\frac{d\vartheta}{d\delta}\right)^2 = a^2 \left(\frac{w\,dv - v\,dw}{w^2}\right)^2 + \left(\frac{w\,du - u\,dw}{w^2}\right)^2 + \left(\frac{w\,dx - x\,dw}{w^2}\right)^2 c^2$$

$$= \frac{1}{w^4} \{w^2 (a\,dv^2 + du^2 + c^2\,dx^2)$$

$$- 2\,w\,dw\,(a^2 v\,dv + u\,du + c^2 x\,dx) + (a^2 v^2 + u^2 + c^2 x^2)\,dw^2\}.$$

Berechnet, addirt etc. ergiebt dies

$$d\vartheta = \frac{3 \sin\delta \cos\delta \sqrt{(1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon)(1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon)(\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \delta)}}{\sqrt{\sin^4 \varepsilon \cos^4 \varepsilon \cos 2\varepsilon + (\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \delta)^2}}\, d\delta.$$

Der Radius der zweiten Krümmung ist $\varrho_{II} = \dfrac{ds}{d\vartheta}$

$$\varrho_{II} = \frac{\sqrt{\sin^4 \varepsilon \cos^4 \varepsilon \cos 2\varepsilon + (\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \delta)^3}}{3 \sin\delta \cos\delta \sqrt{(1 + \sin^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon)(1 - \cos^2 \varepsilon \cos 2\varepsilon)(\sin^2 \tau - \sin^2 \delta)}}$$

und dessen reciproker Werth also die zweite Krümmung.

Der Radius der ganzen Krümmung ist

$$R = \frac{\varrho_I \varrho_{II}}{\sqrt{\varrho_I^2 + \varrho_{II}^2}}$$

$$R = \sqrt{\frac{(\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \delta)^3 (\sin^4 \varepsilon \cos^4 \varepsilon \cos 2\varepsilon + (\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \delta)^3)}{9 \sin^2 \delta \cos^2 \delta \dfrac{\sin^2 \tau \cos^2 \tau}{\sin^2 \varepsilon \cos^2 \varepsilon} (\sin^2 \tau - \sin^2 \delta)(\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \delta) + \varphi}},$$

wo $\varphi = \sin^4 \varepsilon \cos^4 \varepsilon \cos 2\varepsilon + (\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \delta)^3$ ist.

Für den Scheitelpunkt, wo $\delta = \tau$ ist, wird

$$R_0 = \frac{\sin\varepsilon \cos\varepsilon \cos 2\varepsilon}{\sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon \cos^2 \varepsilon \cos^2 2\varepsilon}}.$$

Wir hatten den vom Brennpunkte ausgehenden auf der $\xi\zeta$-Ebene senkrechten Radiusvector oben mit p bezeichnet und gefunden $\operatorname{tg} p = \sin\varepsilon \cos\varepsilon \cos 2\varepsilon$, somit wird $R_0 = \sin p$.

Für den Punkt am Ende der kurzen Axe wird $\delta = 0$, also $R_m = \sin^3 \varepsilon$. In diesem Punkte ist $\varrho_{II} = \infty$, d. h. die Curve ist einen Augenblick als ebene Curve zu betrachten.

Das Maass der ganzen Krümmung $\frac{1}{R}$ wird für diese Grenzlagen also

$$\frac{1}{R_0} = \sqrt{1 + \operatorname{cosec} \varepsilon \,.\, \sec \varepsilon \,.\, \sec 2\varepsilon} = \operatorname{cosec} p$$

$$\frac{1}{R_m} = \operatorname{cosec}^3 \varepsilon.$$

Die sphärischen Ellipsen sind für die Fälle $\varepsilon = 15^0$, $\varepsilon = 30^0$, $\varepsilon = 42^0$ in beifolgender Tafel II verzeichnet.

§ 5. Die Polcurve.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$(y^2 + z^2)(x^2 + z^2) \cos^2 2\varepsilon - z^4 = 0.$$

Die Gleichung des Kegels kann man auch schreiben $x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2 - z^4 \operatorname{tg}^2 2\varepsilon = 0$. Die Gleichungen für die x-Axe $y^2 = 0$, $z^2 = 0$ und für die y-Axe $x^2 = 0$, $z^2 = 0$ eingesetzt, erfüllen jedesmal die Kegelgleichung, es sind also diese Axen in der Kegelgleichung mit dargestellt. Schneidet man in irgend einer Entfernung $x = a$ den Kegel durch eine Parallele zur yz-Ebene, so ist die Gleichung der Schnittcurve $a^2(y^2 + z^2) + y^2 z^2 - z^4 \operatorname{tg}^2 2\varepsilon$ oder Polarcoordinaten eingeführt $a^2 + r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - r^2 \operatorname{tg}^2 2\varepsilon = 0$. Für einen unendlich kleinen Werth gleich 0 von r wird diese Gleichung nicht erfüllt, es giebt also im ganzen Umkreis des Schnittpunktes der Axe keinen Punkt, der ebenfalls dem Kegel angehörte, die x-Axe ist also ein vom Kegel isolirter Strahl, der dem Systeme angehört. Dasselbe gilt von der y-Axe.

Grenzfälle. Wird $2\varepsilon = 0$, d. h. fallen die Rouletten, auf denen sich die Endpunkte des bewegten Quadranten befinden, zusammen, so wird die Gleichung des Polkegels $(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 = 0$, d. h. $xy = 0$, $xz = 0$, $yz = 0$, also auch $x = 0$, $y = 0$, d. h. der Kegel wird zur z-Axe. In diesem Falle werden also die 3 Axen dem Gebilde entsprechen.

Wird $2\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, so folgt $z^4 = 0$, d. h. der Kegel wird zur xy-Ebene. Im ersten Grenzfall werden also beide Polbahnen unendlich klein, im zweiten werden beide Polbahnen grösste Kugelkreise.

Mittelpunkte. Es lässt sich ebenso wie oben für die Polbahn nachweisen, dass, weil die Gleichung nur grade Potenzen enthält, der Kugelmittelpunkt räumlicher Mittelpunkt der Curve ist, die Austrittspunkte der Axen sphärische Mittelpunkte der Curve sind.

Projectionen. Die Projectionen der Curve auf die Coordinatenebenen sind

$$(1 - x^2)(1 - y^2)\cos^2 2\varepsilon - (1 - x^2 - y^2)^2 = 0$$
$$(1 - x^2)(x^2 + z^2)\cos^2 2\varepsilon - z^4 = 0$$
$$(1 - y^2)(y^2 + z^2)\cos^2 2\varepsilon - z^4 = 0.$$

Da nur grade Potenzen vorkommen, so sind die Axen Symmetrieaxen der Projectionen.

Projection auf xy. Die erste dieser Projectionen
$x^4+y^4+x^2y^2(2-\cos^2 2\varepsilon)-x^2(2-\cos^2 2\varepsilon)-y^2(2-\cos^2 2\varepsilon)+\sin^2 2\varepsilon=0$
stellt sich, wenn man dieselbe auf ein neues Axensystem bezieht, welches gegen das vorige um 45^0 gedreht ist, wiederum als eine Gleichung mit nur geraden Potenzen dar, es ist also auch dieses System ein System von Symmetrieaxen, die Coordinatenaxen und die Halbirungslinien ihrer Winkel theilen demnach die Curve in 8 congruente Theile, von denen je 4 gleichliegend sind.

Es wird

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x^3+x(y^2-1)(2-\cos^2 2\varepsilon)}{2y^3+y(x^2-1)(2-\cos^2 2\varepsilon)}=\operatorname{tg}\tau,$$

wo τ der Winkel, welchen die Tangente mit der positiven Richtung der x-Axe bildet, ist.

$$\begin{array}{llll}\text{Für} & x=0, & x=y, & y=0 \quad \text{wird} \\ & \tau=0, & \tau=45^0, & \tau=0,\end{array}$$

also sind die x- und y-Axe und deren Halbirungslinien Normalen auf der Projection der Curve nach der xy-Ebene.

Für $x=0$, resp. $y=0$ wird

$$(1-x^2)(1-y^2)\cos^2 2\varepsilon-(1-x^2-y^2)^2=0 \text{ zu}$$
$$(1-y^2)\cos^2 2\varepsilon-(1-y^2)^2=0\,r, \text{ resp.}$$
$$(1-x^2)\cos^2 2\varepsilon-(1-x^2)^2=0,$$

das heisst auch

$$\text{für } x=0,\ y=1;\ \text{für } y=0,\ x=1.$$

Setzt man dies in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

ein, so folgt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\operatorname{tg}^2\tau=-1,$$

d. h. die Punkte $x=0,\ y=0$

$x=1,\ y=0$ sind isolirte Punkte.

Führt man Polarcoordinaten ein, so erhält man

$$r^4-r^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cos^2 2\varepsilon-r^2(2-\cos^2 2\varepsilon)+\sin^2 2\varepsilon=0$$

$$1-\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cos^2 2\varepsilon-\frac{1+\sin^2 2\varepsilon}{r^2}+\frac{\sin^2 2\varepsilon}{r^4}=0,$$

$$\text{für } r=\infty\ \sin^2 2\varphi=\frac{4}{\cos^2 2\varepsilon},\ 4>\cos^2 2\varepsilon,$$

also nur für imaginare Werthe ε möglich, die Curve hat also keine Punkte in der Unendlichkeit.

Setzt man $\dfrac{dr}{d\varphi}=0$, so erhält man die Maximalwerthe und Minimalwerthe der Entfernung vom Anfangspunkte, und zwar ergeben sich die Schnittpunkte der eigentlichen Curve mit den oben erwähnten Symmetrieaxen. Die

Punkte auf den Coordinatenaxen sind weiteste, die auf den Halbirungslinien nächste vom Anfangspunkt.

Projection xz. Die Projection auf die xz-Ebene ist der auf die yz-Ebene congruent.

$$(1-x^2)(x^2+z^2)\cos^2 2\varepsilon - z^4 = 0 \text{ oder}$$
$$x^2+z^2-x^4-x^2z^2-z^4\sec^2 2\varepsilon = 0.$$

Diese Curve hat reelle Wendepunkte, keine Punkte im Unendlichen. Sie ist eine wellenförmig nach der x-Axe zu gebogene Curve, in den Tafeln ist sie auf Blatt II für die 3 Fälle $\varepsilon = 15^0$, $\varepsilon = 30^0$, $\varepsilon = 42^0$ dargestellt. Für $\varepsilon = 45^0$ wird sie zur x-Axe. In den Tafeln ist die Projection hergeleitet aus der Centralprojection der Polcurve auf die Tangentialebene der Kugel $z = 1$. Diese Centralprojection, d. h. der Schnitt der besagten Ebene $z = 1$ und des Kegels hat die Gleichung

$$x^2+y^2+x^2y^2 = \operatorname{tg}^2 2\varepsilon.$$

Es ist dies auch die Gleichung der Curve in Gudermann'schen Kugelcoordinaten.

In Polarcoordinaten lautet die Gleichung

$$r^2+r^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \operatorname{tg}^2 2\varepsilon = 0$$
$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^3\cos\varphi\sin\varphi\cos 2\varphi}{1+2r^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = 0$$

gesetzt, liefert ausser $r = 0$, was nur für $\operatorname{tg}^2 2\varepsilon = 0$ den Grenzfall gilt,

$$\cos\varphi = 0,\ r = \operatorname{tg} 2\varepsilon,\ \frac{d^2r}{d\varphi^2} = -r^3, \text{ einen Maximalfall,}$$
$$\sin\varphi = 0,\ r = \operatorname{tg} 2\varepsilon,\ \frac{d^2r}{d\varphi^2} = -r^3, \quad \text{„} \qquad \text{„}$$
$$\cos 2\varphi = 0,\ r = \frac{2\sin\varepsilon}{\sqrt{\cos 2\varepsilon}};\ \frac{d^2r}{d\varphi^2} = +r^3 \text{„ Minimalfall.}$$

Da die zx- und zy-Ebenen auf der Curve selbst senkrecht stehen, so stehen deren Centralprojectionen auf der vorliegenden Curve senkrecht, es sind also die in den eben bezeichneten Entfernungen vom Berührungspunkt der Ebene und Kugel schneidenden Radien zugleich Normalen der Curve.

Dividirt man die Polargleichung durch r^4, so erhält man

$$\frac{1}{r^2}+\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \frac{\operatorname{tg}^2 2\varepsilon}{r^4} = 0, \quad \text{für } r = \infty$$
$$\sin\varphi\cos\varphi = 0, \quad \text{also für } \varphi = 0 \text{ und } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

finden sich Zweige im Unendlichen.

Die Gleichung der Tangente an die Curve $x^2+y^2+x^2y^2-\operatorname{tg}^2 2\varepsilon = 0$ im Punkte xy ist $x(1+y^2)\xi + y(1+x^2)\eta - (\operatorname{tg}^2 2\varepsilon + x^2y^2) = 0$, die Gleichung der Tangentialebene des Kegels also

$$zx(z^2+y^2)\xi + zy(z^2+x^2)\eta - (z^4\operatorname{tg}^2 2\varepsilon + x^2y^2)\zeta = 0,$$

wo beide Male $\xi\eta\zeta$ die laufenden Coordinaten.

Die Gleichung der Normalebene ist ebenso im Punkte xyz.

$$zy(z^2+y^2)(z^2+2x^2)\xi + zx(z^2+x^2)(z^2+2y^2)\eta + zxy(x^2-y^2)\zeta = 0.$$

Die Projection $x^2+y^2+x^2y^2-\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon=0$ hat da Wendepunkte, wo der sie projicirende Kegel Wendekanten hat, also auch da, wo entsprechend auf der sphärischen Curve selbst Wendepunkte eintreten.

$$\frac{dy}{dx}=-(1+\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon)\frac{x}{\sqrt{(\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon-x^2)(1+x^2)^3}}=0$$

gesetzt, liefert $x=0$ als den Punkt der grössesten y.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-(1+\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon)\frac{\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon-2\,\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon\,x^2+3x^4}{(\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon-x^2)^{\frac{3}{2}}(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}=0$$

gesetzt, liefert die Wendepunkte, und zwar

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}(\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon\pm\mathrm{tg}\,2\varepsilon\sqrt{\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon-3})},$$

diese Grösse ist nur reell für

$$\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon-3\geq 0,\text{ also }\varepsilon\geq 30^0.$$

Bildet man aus $x^2+y^2+x^2y^2-\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)},$$

also

$$-\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y^2(1+x^2)-4x^2y^2+x^2(1+y^2)}{y^2(1+x^2)^2}$$

und setzt dieses gleich Null, so folgt als Bedingung der Wendepunkte der Centralprojection

$$\begin{array}{l} x^2+y^2-2x^2y^2=0,\text{ für alle Punkte ist aber}\\ \underline{x^2+y^2+x^2y^2=\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon}\\ 3(x^2+y^2)=\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon \end{array}$$

$x^2+y^2=\dfrac{\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon}{3}=$ const. die Wendepunkte liegen also in gleicher Entfernung vom Berührungspunkte der Schnittebene, ferner folgt

$$3x^2y^2=\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon,$$

also $xy=\dfrac{\mathrm{tg}\,2\varepsilon}{\sqrt{3}}$, die Wendepunkte liegen also auf einer gleichschenkligen Hyperbel.

Bildet man auch die dritte Ableitung

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-(1+\mathrm{tg}^2 2\varepsilon)x[4x^6-x^4(1+5\,\mathrm{tg}^2 2\varepsilon)+2x^2\mathrm{tg}^2 2\varepsilon(3+\mathrm{tg}^2 2\varepsilon)+\mathrm{tg}^2 2\varepsilon-3\,\mathrm{tg}^4 2\varepsilon]}{(\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon-x^2)^{\frac{5}{2}}(1+x^2)^{\frac{7}{2}}}$$

und setzt diesen Werth Null, so erhält man die mehrpunktigen Berührungen, gequetschten Stellen. Eine solche tritt somit immer ein für $x=0$. Für den kleinsten Winkel ε, für welchen obige Gleichung noch reelle Wendepunkte ergab, $\varepsilon=30^0$, wird

$$4x^6-x^4(1+5\,\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon)+2x^2\,\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon(3+\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon)+\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon-3\,\mathrm{tg}^4\,2\varepsilon=0$$

zu $x^6+4x^4+9x^2-6=0$, und da auch

$$x=\sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon\pm\sqrt{\mathrm{tg}^4\,2\varepsilon-3\,\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon}}{3}}=1$$

wird, so folgt, da $1 = x$ die obige Gleichung identisch erfüllt, dass für $\varepsilon = 30$, $x = 1 = y$ die 3. Ableitung Null wird, also die Symmetrieaxen diese Figur immer in gequetschten Stellen schneiden.

Erläuterungen zu den Tafeln.

Die einfache Form der Gleichung $x^2 + y^2 + x^2 y^2 = \operatorname{tg}^2 2\varepsilon$ ermöglicht ihre Construction, und durch Centralprojection auch die Construction der sphärischen Curve, resp. deren orthogonale Projection.

Aus obiger Gleichung folgt

$$y = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 2\varepsilon - x^2}{1 + x^2}}, \text{ oder}$$

$$y : 1 = \sqrt{\operatorname{tg}^2 2\varepsilon - x^2} : \sqrt{1 + x^2}.$$

Auf Taf. II $\varepsilon = 15^0$ ist folgende Construction angewandt. Im Punkte O ist eine Tangente an die Kugel gelegt von der Länge $OA = \operatorname{tg} 2\varepsilon$, wenn $OB = 1$ den Kugelradius darstellt, dann sind mit den Radien OA und OB concentrische Kreise um O geschlagen. In den Punkten O und x $(Ox = x)$ sind alsdann Senkrechte auf OB errichtet. Die Senkrechte $OD = 1$, $Ox = x$, folglich die in der Figur nicht ausgezogene Gerade $xD = \sqrt{1 + x^2} = xE$, da DE ein um x mit dem Radius xD geschlagener Kreisbogen ist.

Es ist $OC = OA = \operatorname{tg} 2\varepsilon$, also $Cx = \sqrt{OC^2 - Ox^2} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 2\varepsilon - x^2}$.

Nun ist von E aus die Länge $EF = OD = 1$ aufgetragen, in F die Senkrechte FG bis zum Schnitt mit CE errichtet und $GP \parallel OB$ gezogen, so ist P der verlangte Punkt, denn $y = Px = GF$ und $Cx : xE = GF : FE$ oder

$$GF = Px = y = \frac{Cx\,FE}{xE} = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 2\varepsilon - x^2} \,.\, 1}{\sqrt{1 + x^2}} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 2\varepsilon + x^2}{1 + x^2}}.$$

Auf Tafel II $\varepsilon = 30^0$ ist in Figur 1 die Construction wie für $\varepsilon = 15^0$ gemacht. Ueber der Tangente in O sind Kreisbögen mit den Radien $OB = 1$ und $OA = \operatorname{tg} 2\varepsilon$ (diesmal $OA > OB$) geschlagen. Auf OA die Senkrechten $OD = 1 =$ dem Kugelradius und xC in dem Abstande $Ox = x$ errichtet, die Punkte x mit D verbunden gedacht und mit den Radien xD Kreise geschlagen DE, die Punkte E sind dann mit C verbunden und von den Punkten E aus auf der Abscissenaxe die Längen $EF = 1$ aufgetragen, in den Punkten F errichtete Senkrechte schneiden in G Parallele aus diesen Punkten zur Axe OA in P.

Fig. 2 stellt eine zweite Construction dar. Es sind die Senkrechten Cx in den Punkten L halbirt, um diese Punkte mit den Radien $LC = Lx$ Kreise geschlagen, welche die Geraden xD in den Punkten R schneiden. Mit den Radien xR sind nun um x Kreise geschlagen, diese schneiden die Geraden xC in P den Punkten der gesuchten Curve.

Beweis: Es sind CRx rechtwinklige Dreiecke, und da CR senkrecht auf Dx, so sind dieselben ähnlich den Dreiecken xDO, also

$$Cx : xR = xD : OD, \text{ d. i.}$$

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 2\varepsilon - x^2} : xR = \sqrt{1 + x^2} : 1, \text{ also}$$

$$xP = xR = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 2\varepsilon - x^2}{1 + x^2}}.$$

Die Kreisordinaten xC werden durch die Ellipse $x^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ halbirt.

In Fig. 4 Taf. II sind für die Winkel $\varepsilon = 5^0, 10^0, 15^0, 20^0, 22^1/_2{}^0$ und für $\varepsilon = 5^0, 10^0, 15^0, 20^0, 22^0/_{30,}, 25^0, 30^0, 35^0, 40^0, 45^0$ diese Curven verzeichnet nach derselben Art, wie in Tafel II, Fig. 2, $\varepsilon = 30^0$, nur sind die Fusspunkte R nicht durch Kreise, sondern durch directe Lothe construirt.

Auf Tafel II $\varepsilon = 42^0$ ist die Schnittebene nicht im Abstand $z = 1$, sondern $z = \cos 2\varepsilon$ gelegt, im Uebrigen ist die Construction wie auf Tafel II, $\varepsilon = 15^0$. Die Gleichung dieses Schnittes könnte man schreiben

$$\frac{x^2}{\cos^2 2\varepsilon} \cdot \frac{y^2}{\cos^2 2\varepsilon} + \frac{x^2}{\cos^2 2\varepsilon} + \frac{y^2}{\cos^2 2\varepsilon} = \operatorname{tg}^2 2\varepsilon.$$

Es tritt somit die Länge $\cos 2\varepsilon$ an die Stelle der Länge 1.

Die Projection auf die Kugel geschieht wie folgt (s. Fig. 16): Ist P ein Punkt der Tangentialebene Ox an die Kugel (die Tangentialebene erscheint hier, wie auf den Zeichnungen um die Tangente in der xz-Ebene um 90^0 herumgeklappt), so werden alle Punkte der Geraden xP durch die Ebene xM projicirt. Macht man $POQ = \frac{\pi}{2}$, $QO = OM = QS$ und zieht ST parallel OP, so ist $OT = OU$ der Abstand des kleinen Kugelkreises, auf welchem der Punkt liegt von O, zieht man also $U\mathfrak{P} = \parallel Ox$, so ist $\mathfrak{P}$ der verlangte Punkt.

Die Uebertragung eines Punktes $\mathfrak{P}$ der Kugel auf eine zweite Projection derselben geschah mit Hülfe folgender Betrachtung. Der Punkt $\mathfrak{P}$ ist Punkt eines kleinen Kugelkreises mit dem Radius IH, schlägt man daher diesen Kreis, so wird $\mathfrak{P}K$ der Abstand der folgenden Projection von der Mittelaxe sein, also macht man $L\mathfrak{p} = \mathfrak{P}K$, so ist $\mathfrak{p}$ die folgende Projection.

Construction der Tangente. Soll im Punkte $\mathfrak{P}$ der Curve die Tangente construirt werden, so zieht man die sphärischen Geraden $x\mathfrak{P}$ und $y\mathfrak{P}$, dieselben schneiden die Coordinatenebenen in den Punkten A und A', welche die Scheitelpunkte der elliptischen Polbahn sind, wie aus der Einleitung resp. § 1 hervorgeht. Diese sind die sphärischen Mittelpunkte der grössten Kugelkreise $x\eta$ und $y\eta$, welche von den auf ihnen gleitenden Punkten xy beschrieben werden, resp. durch diese Punkte hindurchgleiten. Fig. 14. x und $x\eta$, resp. y und $y\eta$ bilden somit Hüllcurvenpaare, deren Hüllbahnen Rouletten geworden sind, da ihre Hüllcurven zu Punkten zusammengeschrumpft sind.

Projicirt man mithin die Punkte x und y und die sphärischen (constanten) Mittelpunkte der von ihnen beschriebenen Rouletten (es sind diese Punkte A u. A_1) auf die Tangentialebene an die Kugel in $\mathfrak{P}$ (Fig. 15), zieht $\mathfrak{P}D$ und trägt Winkel $(D)\mathfrak{P}x = \alpha$ an $(A_1)\mathfrak{P}$ an, so ist $\mathfrak{P}T$ die Tangente der Polbahnen.

Kann man auf der Kugel mit grössten Kreisen construiren, so bleibt die Construction genau dieselbe.

Die Construction liefert die gemeinschaftliche Tangente von Polcurve und Polbahn, sie ist daher für beide Curven dieselbe.

Neue Variable. Die kinematische Entstehung der Polbahn und der Polcurve giebt uns ein Mittel an die Hand, eine neue Variable einzuführen, die zugleich in das feste wie in das bewegte System eingesetzt werden kann, und somit es ermöglicht, die Zusammengehörigkeit sich berührender Kegelkanten zu finden.

Bezeichnet man nämlich die Bögen $x\eta$ mit φ_1, $y\eta$ mit φ_2, wie schon im § 1 geschehen, so ist, wie dort bereits gezeigt wurde, $\operatorname{ctg}\varphi_1 \operatorname{ctg}\varphi_2 = \cos 2\varepsilon$.

Die Gleichung der

Polbahn (sphärische Ellipse) wird:

$$\xi = \frac{(\sin\varepsilon \operatorname{ctg}^2\varphi_1 - \cos 2\varepsilon)}{\sqrt{\operatorname{ctg}^4\varphi_1 + 2\operatorname{ctg}^2\varphi_1 \cos^2 2\varepsilon\,(1 + 2\sin^2 2\varepsilon \cos^2 2\varepsilon) + \cos^2 2\varepsilon}}$$

$$\eta = \frac{2\sin 2\varepsilon \cos 2\varepsilon \operatorname{ctg}\varphi_1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^4\varphi_1 + 2\operatorname{ctg}^2\varphi_1 \cos^2 2\varepsilon\,(1 + \sin^2 2\varepsilon \cos^2 2\varepsilon) + \cos^2 2\varepsilon}}$$

$$\zeta = \frac{\cos\varepsilon(\operatorname{ctg}^2\varphi_1 + \cos 2\varepsilon)}{\sqrt{\operatorname{ctg}^4\varphi_1 + 2\operatorname{ctg}^2\varphi_1 \cos^2 2\varepsilon\,(1 + 2\sin^2 2\varepsilon \cos^2 2\varepsilon) + \cos^2 2\varepsilon}}.$$

In Coordinaten des Polcurvensystems stellen sich die Ebenen, welche sich in $O\mathfrak{P}$ schneiden, dar als

$$+ z\sin 2\varepsilon \cos\varphi_1 + y\cos 2\varepsilon = 0,$$
$$+ z\sin 2\varepsilon + x\sqrt{\operatorname{ctg}^2\varphi_1 + \cos^2 2\varepsilon} = 0$$

und hieraus

$$4)\quad x^2 = \frac{\sin^2 2\varepsilon(1 + \operatorname{ctg}^2\varphi_1)\cos^2 2\varepsilon}{\cos^2 2\varepsilon + \operatorname{ctg}^2\varphi_1\,(3 - \cos^2 2\varepsilon)\cos^2 2\varepsilon + \operatorname{ctg}^4\varphi_1},$$

$$5)\quad y^2 = \frac{\sin^2 2\varepsilon \operatorname{ctg}^2\varphi_1\,(\operatorname{ctg}^2\varphi_1 + \cos^2 2\varepsilon)}{\cos^2 2\varepsilon + \operatorname{ctg}^2\varphi_1\,(3 - \cos^2 2\varepsilon)\cos^2 2\varepsilon + \operatorname{ctg}^4\varphi_1},$$

$$6)\quad z^2 = \frac{\cos^2 2\varepsilon\,(1 + \operatorname{ctg}^2\varphi_1)(\operatorname{ctg}^2\varphi_1 + \cos^2 2\varepsilon)}{\cos^2 2\varepsilon + \operatorname{ctg}^2\varphi_1\,(3 - \cos^2 2\varepsilon)\cos^2 2\varepsilon + \operatorname{ctg}^4\varphi_1}.$$

Setzt man in diesen 6 Coordinatengleichungen für φ_1 denselben Werth, so ergeben sich in beiden Coordinatensystemen die Coordinaten der zusammenfallenden Punkte.

Diese Coordinaten lassen sich benutzen zur Auffindung des Krümmungsradius der Curve.

Es ist oben (§ 2) gezeigt worden, dass, wenn α den Winkel vorstellt, den die Ebene der Krümmungsaxen eines Hüllsystems mit der oben construirten Tangentenebene der Polbahn bildet, $r\,r_1$ die Tangenten der Winkel sind, welche die erwähnten Krümmungsaxen mit der Berührungskante des Polkegels einschliessen, dass alsdann

$$\sin\alpha\left(\frac{0}{r} + \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{P} \pm \frac{1}{P_1}$$

ist, wo $P\,P_1$ die Tangenten der Winkel darstellen, welche die Krümmungsaxen der Polkegel mit deren Berührungskante bilden.

In unserm Falle ist, wie schon gesagt, die Hüllbahn Roulette, die Hüllcurve also ein Punkt.

Setzt man $x = \cos\lambda$, so wird

$$\frac{1}{r} = \operatorname{ctg}\lambda, \quad \frac{1}{r_1} = \operatorname{tg}\varphi$$

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{\varphi^4 + \varphi^2 c^2 (3 - c^2) + c^2}{\sqrt{(1-c^2) c^2 (1+\varphi^2)(\varphi^2 + c^2)^2}},$$

wo $\varphi = \operatorname{ctg}\varphi$, $c = \cos 2\varepsilon$ ist.

Die Gleichung der Tangentialebene des Kegels im Punkte $x_1\, y_1\, z_1$ ist

$$x x_, (y_,^2 + z_,^2) + y y_, (x_,^2 + z_,^2) + z z_, (x_,^2 + y_,^2 - 2 z_1^2 \operatorname{tg}^2 2\varepsilon) = 0, \text{ also}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{\varphi^4 + \varphi^2 c^2 (3 - c^2) + c^2}{(1+\varphi^2)(\varphi^4 + 2\varphi^2 (2 - c^2) + c^2)}},$$

mithin

$$\sin\alpha \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_,}\right) = \frac{(\varphi^4 + \varphi^2 c^2 (3 - c^2) + c^2)^{\frac{3}{2}}}{(\varphi^2 + c^2)(1+\varphi^2)\sqrt{(1-c^2)c^2(\varphi^4 + 2\varphi^2(2-c^2) + c^2)}}$$

$$P = \sqrt{\frac{(\sin^2\varepsilon - \sin^2\delta)^3}{\sin^4\varepsilon \cos^4\varepsilon \cos 2\varepsilon}}, \text{ wo } \sin^2\delta = \xi(1 - \cos^2\varepsilon \cos 2\varepsilon),$$

$$\text{d. i.} \quad P = \sqrt{\frac{c^2(\varphi^4 + 2\varphi^2(2-c^2) + c^2)^3 (1 - c^2)}{4(\varphi^4 + \varphi^2 c^2 (3 - c^2) + c^2)^3}}$$

und hieraus

$$\frac{1}{P_,} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_,}\right)\sin\alpha - \frac{1}{P}$$

$$= \pm \frac{(\varphi^4 + \varphi^2 c^2 (3 - c^2) + c^2)^{\frac{3}{2}} (\varphi^4 - 2\varphi^2 (1 - 2c^2) + c^2)}{\sqrt{c^2(1-c^2)}\,(\varphi^4 + 2\varphi^2(2-c^2) + c^2)^{\frac{3}{2}} (\varphi^2 + c^2)(1+\varphi^2)}.$$

Aus dem Vorzeichen von $\frac{1}{P_,}$ kann man ersehen, nach welcher Seite zu $P_,$ liegt, ob auf derselben Seite wie P oder in dessen Verlängerung, jenseits der Tangente. Da $2\varepsilon \leqq \frac{\pi}{2}$ ist, so werden alle Factoren stets positiv sein müssen, ausser $\varphi^4 - 2\varphi^2(1 - 2c^2) + c^2$. Setzt man diesen Ausdruck $= \psi$, oder schreibt, indem man $\operatorname{ctg}^2\varphi_, = \varphi^2 = x^2$ und $\cos 2\varepsilon = y$ setzt, $\psi = z$, und diese Grössen als rechtwinklige Coordinaten betrachtet $z = x^4 + y^2 - 2x^2(1 - 2y^2)$, so stellt dies eine Fläche dar, welche die xy-Ebene in $y = 2\sqrt{\frac{2x^2 - x^4}{2 + 4x^2}}$ schneidet, also in einer durch den Anfangspunkt gehenden Curve. Diese Schnittcurve ergiebt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(1 - x^2 - 2y^2)}{y(1+4x^2)}, \quad \text{für} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \text{ also } \frac{0}{0},$$

also einen Doppelpunkt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(1 - x^2 - 2x^4)}{\sqrt{(2-x^2)(1+4x^2)^3}},$$

für $x=0$ also $\operatorname{tg}\tau=\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{2}$. Die Curve $x^4+4x^2y^2-2x^2+y^2=0$ giebt in Polarcoordinaten die Gleichung

$$r^2=\frac{2\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi(\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi)},$$

dies wird nur negativ, wenn der Radiusvector die Tangente des Anfangspunktes passirt hat $(2<\operatorname{tg}^2\varphi)$, die Curve ist also eine geschlossene.

Da $y\,(=\cos 2\varepsilon)<1$ ist, so habe ich die Fläche nur innerhalb dieser Grenze zu untersuchen, um das Vorzeichen von z in Erfahrung zu bringen.

Für alle Punkte innerhalb der Schnittcurve ist das Vorzeichen dasselbe. Legt man nun eine Ebene $x=c$ parallel der yz-Ebene durch die Fläche, so wird diese in einer Parabel geschnitten, $z=y(1+4c^2)-c^2(2-c^2)$, die nach oben geöffnet ist, also ist $P_{,}$ innerhalb eines Gebietes negativ, das von ε und von $\varphi_{,}$ abhängig ist. y (d. i. $\cos 2\varepsilon$) wird in diesem Gebiete höchstens $\frac{1}{2}$, da $\frac{dy}{dx}=0$ gesetzt, liefert $x^2=\frac{1}{2}$, $y^2=\frac{1}{4}$, d. h. die Region der Wendepunkte beginnt erst bei $\cos 2\varepsilon\geqq\frac{1}{2}$ $\varepsilon\geqq 30^0$, für alle Werthe ε, die grösser als 30^0 sind, deren $\cos 2\varepsilon$ also kleiner als $\frac{1}{2}$ wird, werden sich also Punkte finden, für welche $P_{,}$ das Zeichen wechselt, d. h. es werden Wendepunkte eintreten.

Die Winkel, welche $PP_{,}$ mit den xyz-Axen bildet, sind ($\varphi=\operatorname{ctg}\varphi_1$, $c=\cos 2\varepsilon$ geschrieben).

$$\cos\lambda=\frac{\varphi^2+c^2}{\sqrt{(1+\varphi^2)(c^2+2\varphi^2(2-c^2)+\varphi^4)}}$$

$$\cos\mu=\frac{c\varphi(1+\varphi^2)}{\sqrt{(\varphi^2+c^2)(c^2+2\varphi^2(2-c^2)+\varphi^4)}}$$

$$\cos\nu=\frac{\sqrt{(1-c^2)^3}(c^2+c^2\varphi^2+\varphi^2)}{\sqrt{(1+\varphi^2)(\varphi^2+c^2)(c^2+2\varphi^2(2-c^2)+\varphi^4)}}.$$

Der Endpunkt von $P_{,}$ liegt auf xyz bezogen,

$$x_p=x\pm P\cos\lambda,\ y_p=y\pm P\cos\mu,\ z_p=z\pm P\cos\nu,$$

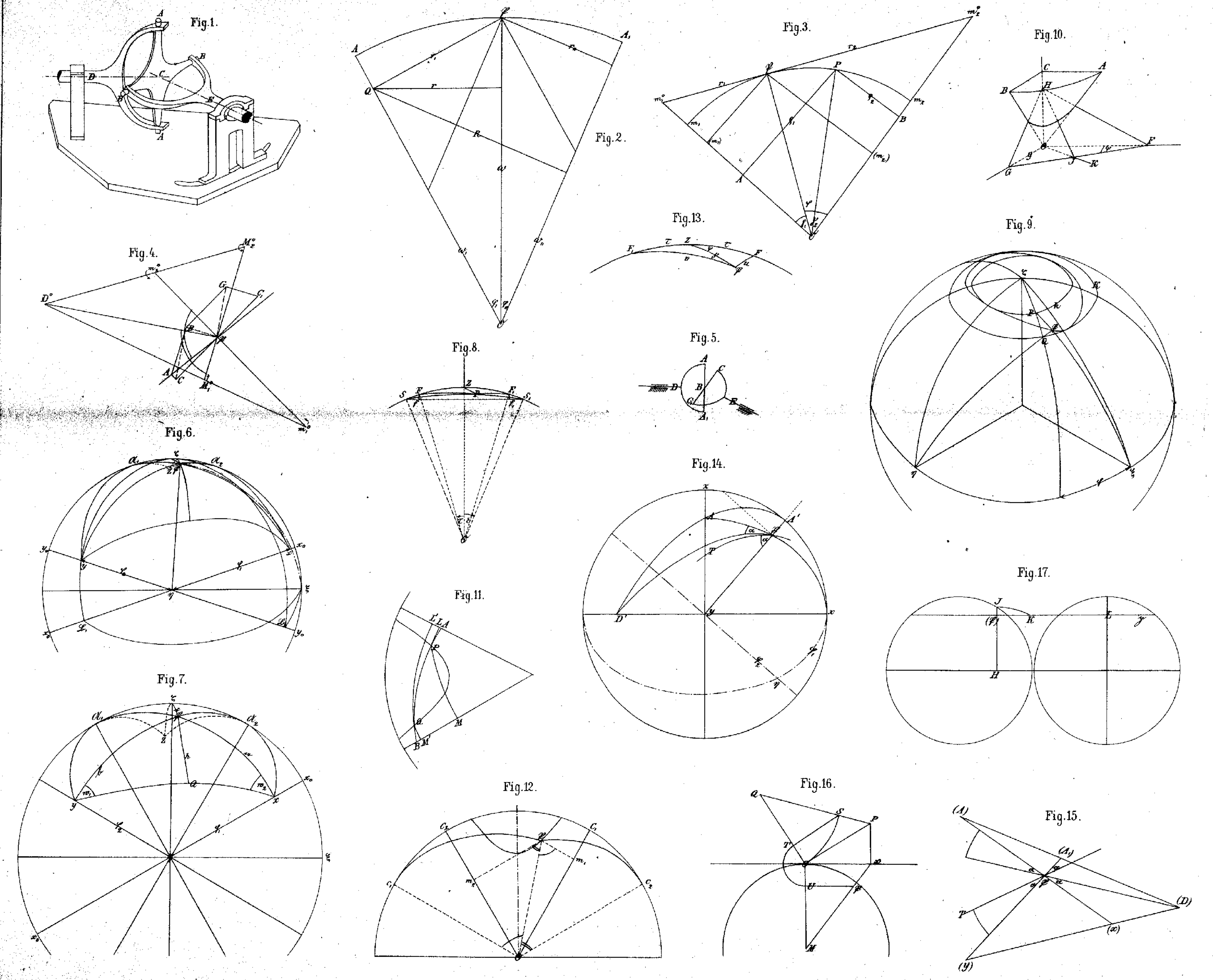
wo xyz die Coordinaten von $\mathfrak{P}$ sind.

Die Gleichung der Normalebene wird

$$(\varphi^2+c^2)^{\frac{3}{2}}(\varphi^2+2-c^2)\varphi x-c(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}(2\varphi^2-c^2\varphi^2+c^2)y$$
$$+(1-c^2)^{\frac{3}{2}}(\varphi^4-c^2)\varphi z=0.$$

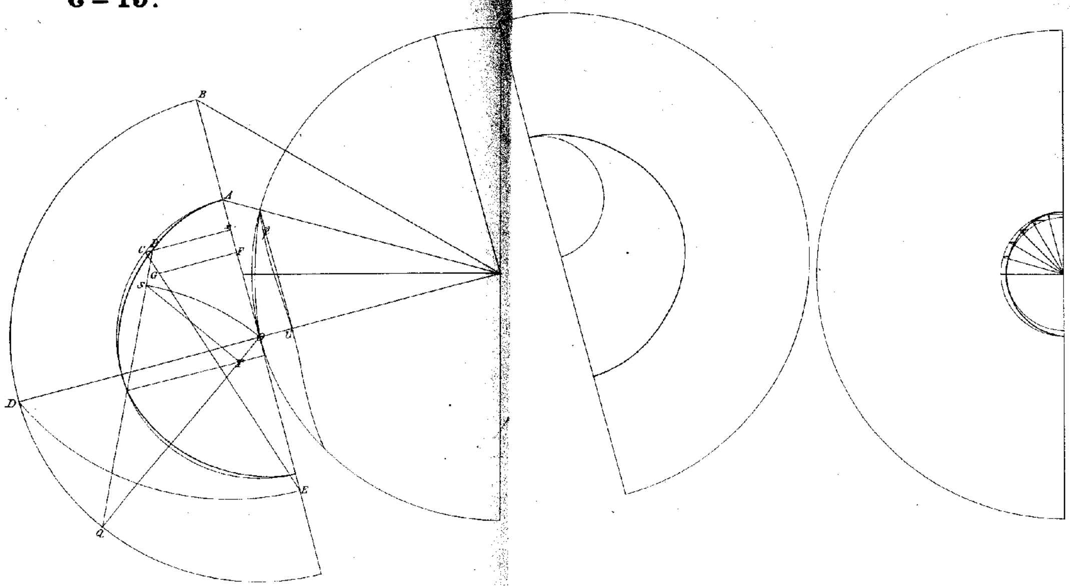
2 Deil

Druck von Oskar Bonde in Altenburg.



P.O Marbach inv. Verlag v. Ernst & Korn in Berlin. Lith.Anst.v. Carl Müller Berlin.

ε = 15°.



ε = 30°.

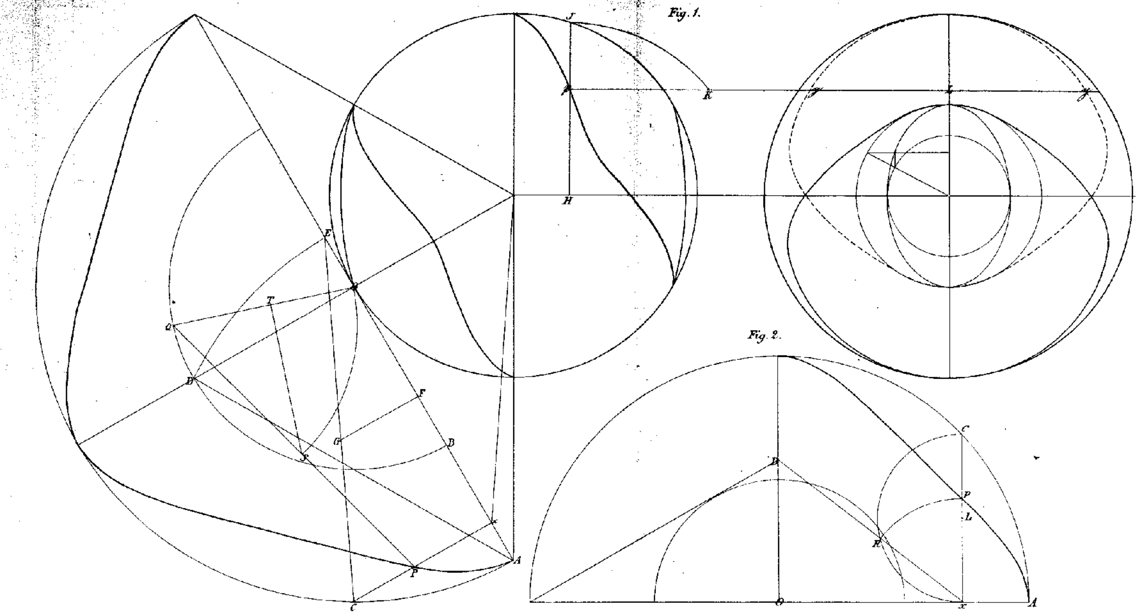
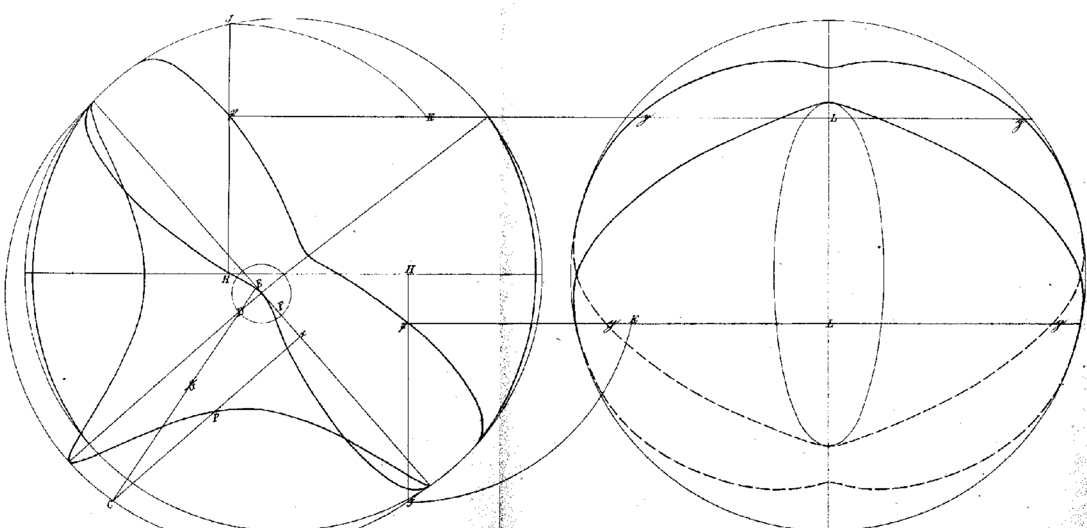
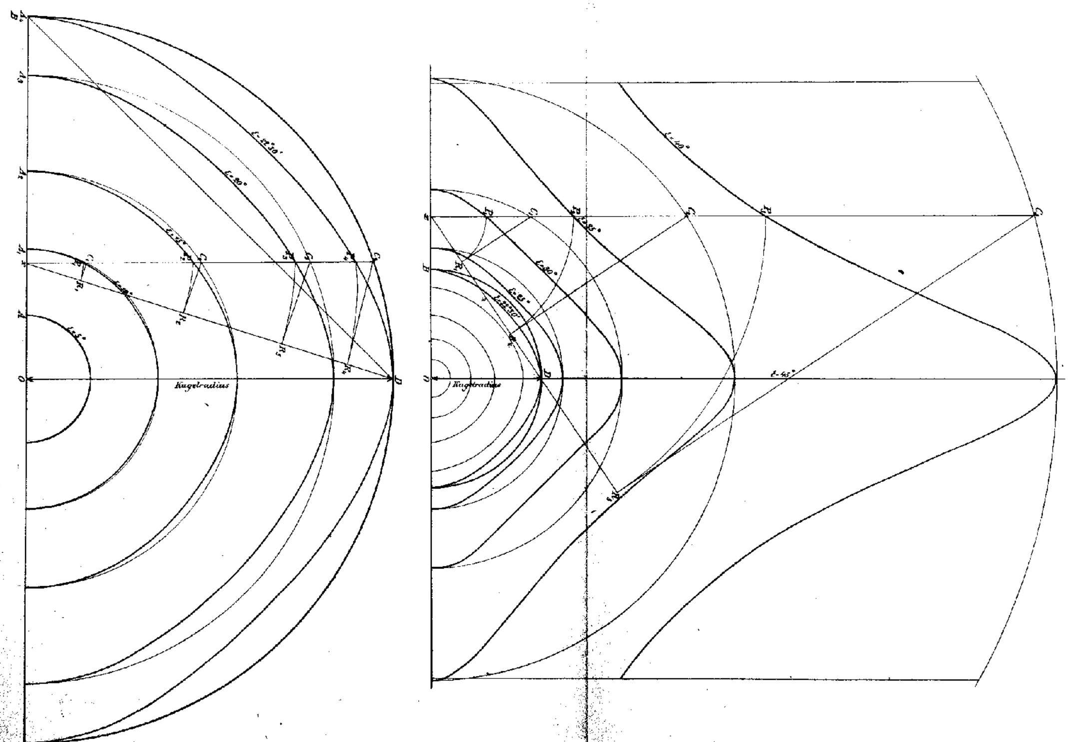


Fig. 1.

Fig. 2.

ε = 42°.





P. O. Marbach inv.

Verlag v. [illegible] in Berlin.

Lith. Anst. v. Carl Müller, Berlin.